Završni ispit iz Naučnog izračunavanja – septembar 2015.

1. zadatak

Neka je zadata mreža $\omega = \{(x_i, y_j) | x_i = x_0 + ih_x,\ y_j = y_0 + jh_y,\ i, j = 0, 1, .., n\}$, $x_{i+1} - x_i = h_x = const$, $y_{j+1} - y_j = h_y = const$, $i, j = 0, 1, .., n-1$. U tačkama mreže ω date su vrednosti funkcije $z = f(x, y)$: $z_{ij} = f(x_i, y_j), i, j = 0, 1, .., n$. Definisati podeljene razlike za funkciju dve promenljive na mreži ω i navesti njihove osobine.

2. zadatak

Neka su funkcije $y = f(x)$ i $y = g(x)$ zadate sledećim vrednostima u ekvidistantnim čvorovima x_i, $i = 0, 1, ..., 5$

x_i	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$f(x_i)$	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
$g(x_i)$	g_0	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5

a) Aproksimirati funkciju $g^{-1}(y)$ interpolacionim polinomom koristeći sve vrednosti u tablici.

b) Aproksimirati funkciju $f(x)$ na segmentu $[x_0, x_5]$ koristeći kvadratni splajn.

c) Koristeći delove pod a) i b), aproksimirati funkciju $F(x) = (g^{-1} \circ f)(x)$ na segmentu $[x_0, x_5]$.

3. zadatak

Neka je u oblasti $[-1, 1] \times [-1, 1] \subseteq R^2$ zadata mreža $\omega = \{(x_i, y_j) \mid x_i = -1 + ih_x,\ y_j = -1 + jh_y\}, h_x = x_{i+1} - x_i = 0.5,\ h_y = y_{j+1} - y_j = 0.5,\ i, j = 0, 1, .., 4$. Za funkciju $z = f(x, y)$ date su njene vrednosti u tačkama mreže ω: $z_{ij} = f(x_i, y_j),\ i, j = 0, 1, 2, 3, 4$.

a) Pomoću vrednosti funkcije dve promenljive $z = f(x, y)$ na mreži ω, približno izračunati vrednost integrala $I = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} f(x, y) dydx$ pomoću kubatorne formule koja se dobija tako što se za računanje integrala po x i y koristi kvadraturna formula levog pravougaonika.

b) Na koji način se može izračunati integral $I = \int\int_G f(x, y) dxdy$, gde je $G = \{(x, y) \in R^2 : y^2 - 1 - x \leq 0,\ x - 1 \leq 0\}$ koristeći deo pod a)?

4. zadatak

a) Odrediti najbolju srednjekvadratnu aproksimaciju za funkciju $f(x) = xe^{-x}$ na $[1, 2]$ sa težinskom funkcijom $p(x) = \frac{1}{x}$ u prostoru polinoma stepena ne većeg od 3.

b) Oceniti grešku aproksimacije dobijene pod a).

5. zadatak

a) Neka je dat Košijev problem $u'(x) = f(x, u(x)),\ u(x_0) = u_0$ i niz ekvidistantnih tačaka $x_0, x_1, x_2, ...$ pri čemu je $x_j - x_{j-1} = h,\ j = 1, 2, ...$Izvesti postupak konstrukcije iterativnog niza v_j, $v_j \approx u(x_j)$, $j = 0, 1, 2, ...$ prediktor-korektor metodom za $k = 3$, pri čemu se za osnovnu iterativnu formulu za v_j koristi aproksimacija integrala osnovnom Simposnovom kvadraturnom formulom na $[x_{j-2}, x_j]$, a za korekciju v_j^* Njutnov interpolacioni polinom za interpolaciju unazad stepena dva koji koristi čvorove $x_{j-3}, x_{j-2}, x_{j-1}$.

b) Koji je red tačnosti primenjene metode? Koja je prva vrednost v_j koja se može dobiti na ovaj način? Kako se dobija nekoliko prvih vrednosti v_j koje se mogu dobiti prediktor-korektor formulama?