

Zavrsni ispit iz Naucnog izračunavanja-jun 2011.

1. zadatak

Na koji način se ocenjuje greška interpolacije funkcije $y = f(x)$ na intervalu $[a, b]$ splajnom $S_{\Delta}^k(f, x)$ reda k za podelu $\Delta : a \leq x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_m \leq b$?

2. zadatak

Neka je u oblasti $[a, b] \times [c, d] \subseteq R^2$ zadata mreža $\omega = \{(x_i, y_j) | x_i = x_0 + ih_x, y_j = y_0 + jh_y, i, j = 0, 1, \dots, n\}$, $x_{i+1} - x_i = h_x = \text{const}$, $y_{j+1} - y_j = h_y = \text{const}$, $i, j = 0, 1, \dots, n-1$. U tačkama mreže ω date su vrednosti funkcije $z = f(x, y)$: $z_{ij} = f(x_i, y_j)$, $i, j = 0, 1, \dots, n$.

- Definisati konačne razlike za funkciju dve promenljive na mreži ω .
- Kako se dobija formula za interpolaciju funkcije dve promenljive $z = f(x, y)$ interpolacionim polinomom $P^{II}(x, y)$ koji aproksimira funkciju $z = f(x, y)$ i analogan je Njutnovom interpolacionom polinomu funkcije jedne promenljive za interpolaciju unazad?
- Koji je najveći stepen polinoma iz dela pod b)?

3. zadatak

- Odrediti najbolju srednjekvadratnu aproksimaciju za funkciju $f(x) = \cos(x)$ na segmentu $[0, \pi/2]$ sa težinskom funkcijom $p(x) = 1$ u prostoru polinoma stepena ne većeg od 1.
- Oceniti grešku dobijene aproksimacije.

4. zadatak

Šta su ortogonalni polinomi i koja je njihova uloga u teoriji aproksimacije funkcija?

5. zadatak

Dat je Košijev problem $u'(t) = t^2 + u(t)$, $u(1) = 1$. Konstruisati iterativni niz v_k ($u(t_k) \approx v_k$, $t_k = t_0 + kh$, $h = \text{const}$) za približno rešavanje datog problema, primenom:

- Ojlerove metode,
- I modifikacije Ojlerove metode,
- II modifikacije Ojlerove metode.

U svakom od navedenih slučajeva navesti red tačnosti primenjene metode.

6. zadatak

- Šta su kruti sistemi diferencijalnih jednačina? Navesti jedan primer takvog sistema.
- Koje numeričke metode su pogodne za uspešno rešavanje ovih sistema?

7. zadatak

Dat je granični problem:

$$\begin{aligned}\Delta u(x, y) &= f(x, y), (x, y) \in \Omega \\ u(x, y) &= g(x, y), (x, y) \in \Gamma.\end{aligned}$$

Neka je $\Omega = \{(x, y) \in R^2 : |x| + 2|y| < 2\}$, $\Gamma = \delta\Omega = \{(x, y) \in R^2 : |x| + 2|y| = 2\}$, $f(x, y) = x^3 + y^3$ i $g(x, y) = xy$.

- Definisati kvadratnu mrežu sa korakom $h = 0.5$ i u njenim čvorovima aproksimirati jednačinu diferencijskom šemom.
- Napisati odgovarajući sistem jednačina za nalaženje približnih vrednosti funkcije $u(x, y)$ u čvorovima mreže. Koliki je red greške dobijene aproksimacije?