Zavrsni ispit iz Naucnog izračunavanja – jun 1 2013.

1. zadatak

Neka je u oblasti $[a,b]\times[c,d]\subseteq R^2$ zadata mreža $\omega=\{(x_i,y_j)|x_i=x_0+ih_x, y_j=y_0+jh_y, i,j=0,1,..,n\}$, $x_{i+1}-x_i=h_x=const$, $y_{j+1}-y_j=h_y=const$, $i,j=0,1,..,n-1$. U tačkama mreže ω date su vrednosti funkcije $z=f(x,y)$: $z_{ij}=f(x_i,y_j), i,j=0,1,..,n$.

a) Definisati konačne razlike za funkciju dve promenljive na mreži ω.

b) Napisati formulu za interpolaciju funkcije dve promenljive $z=f(x,y)$ interpolacionim polinomom $P(x,y)$ sa konačnim razlikama za interpolaciju unazad koji aproksimira funkciju $z=f(x,y)$? Koristiti konačne razlike $\triangle^{k+l}f(x_i,y_j)$, $0\le k+l\le 2$.

c) Pod pretpostavkom da koristimo sve tačke sa mreži ω, koji je najveći stepen polinoma sa konačnim razlikama $P(x,y)$ koji se može konstruisati?

2. zadatak

a) Koristeći formulu iz zadatka 1. iz dela pod b), približno izračunati

$$\int_a^b\int_c^c f(x,y)dxdy$$

koristeći trapeznu kubatornu formulu.

b) Na koji način se može približno izračunati $\int\int_\Omega f(x,y)dxdy$, gde je Ω zatvoren konveksan skup u ravni?

3. zadatak

Metodom najmanjih kvadrata odrediti aproksimacionu funkciju oblika $F(x)=asin(\pi x)+bcos(\pi x)$ koja aproksimira podatke date tabelom:

x	-1	$-1/2$	0	$1/2$	1
$F(x)$	-1	0	2	1	

Oceniti grešku dobijene aproksimacije.

4. zadatak

a) Defininisati Furijeov red funkcije $y=f(x)$ u odnosu na skalarni proizvod $(g,h)=\int_0^a g(x)h(x)dx$.

b) Koristeći deo pod a) aproksimirati funkciju $y=\sin^4(x)\cos^3(x)$ na intervalu $[0,2\pi]$.

5. zadatak

Dat je Košijev problem:

$$x'(t)=t^2z(t),$$
$$y'(t)=\sin(y(t))+\cos(x(t)),$$
$$z'(t)=x^2(t)+y^2(t)$$

sa početnim uslovima:

$$x(0)=0,\ y(0)=1,\ z(0)=1$$

a) Konstruisati iterativne nizove x_k, y_k i z_k, $k=0,1,2,...$ za približno rešavanje datog problema, primenom jedne od modifikacija metode Ojlera (naznačiti koja modifikacija je korišćena). Napomena: $x_k\approx x(t_k)$, $y_k\approx y(t_k)$ i $z_k\approx y(t_k)$, gde je $t_k=kh, h=const, k=0,1,2,....$

b) Koji je red tačnosti primenjene metode?