Zavrsni ispit iz Naucnog izračunavanja – januar 2014.

1. zadatak

Neka je funkcija $y = f(x)$ zadata tablicom

x_i	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
$f(x_i)$	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
$f'(x_i)$	y'_0	y'_0	y'_2	y'_3	y'_4	y'_5	y'_6

a) Aproksimirati funkciju zadatu tablicom kvadratnim splajnom na segmentu $[x_0, x_n]$.

b) Aproksimirati funkciju zadatu tablicom Hermitovim interpolacionim polinomom na segmentu $[x_0, x_n]$.

2. zadatak

Neka je u oblasti $[a, b] \times [c, d] \subseteq R^2$ zadata mreža $\omega = \{(x_i, y_j) | x_i = x_0 + ih_x, y_j = y_0 + jh_y, i, j = 0, 1, .., n\}$, $x_{i+1} - x_i = h_x = const$, $y_{j+1} - y_j = h_y = const$, $i, j = 0, 1, .., n - 1$. U tačkama mreže ω date su vrednosti funkcije $z = f(x, y)$: $z_{ij} = f(x_i, y_j), i, j = 0, 1, .., n$.

Definisati konačne razlike za funkciju dve promenljive na mreži ω i navesti njihove osobine.

3. zadatak

Neka je u oblasti $[a, b] \times [c, d] \subseteq R^2$ zadata mreža $\omega = \{(x_i, y_j) | x_i = -1 + ih_x, y_j = jh_y, \}, x_{i+1} - x_i = h_x = 0.25, y_{j+1} - y_j = h_y = 0.5, i = 0, 1, .., 8, j = 0, 1, ..., 4$. U tačkama mreže ω date su vrednosti funkcije $z = f(x, y)$: $z_{ij} = f(x_i, y_j), i = 0, 1, .., 8; j = 0, ..., 4$.

a) Izračunati približnu vrednost integrala $I = \int_{-1}^{1} \int_{0}^{2} f(x, y) dxdy$ pomoću trapezne kubatorne formule, koja je dobijena koristeći vrednosti funkcije dve promenljive na mreži ω.

b) Na koji način se može izračunati integral $I = \int \int_G f(x, y) dxdy$, gde je $G = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + (y - 1)^2 < 1\}$ koristeći deo pod a)?

4. zadatak

a) Odrediti najbolju srednjekvadratnu aproksimaciju za funkciju $f(x) = xe^x$ na segmentu $[0, 1]$ sa težinskom funkcijom $p(x) = 1$ u prostoru polinoma stepena ne većeg od 1.

b) Oceniti grešku dobijene aproksimacije.

5. zadatak

Dat je Košijev problem:

$$x'_1(t) = x_1^2(t) + x_2^2(t)$$
$$x'_2(t) = \sin^2(x_1(t)) + \cos^2(x_2(t))$$

sa početnim uslovima:

$$x_1(0) = 0, \ x_2(0) = 1.$$

a) Konstruisati iterativne nizove $x_1^{(k)}$, $x_2^{(k)}$, $k = 0, 1, 2, ...$ za približno rešavanje datog problema, ako se za konstrukciju niza $x_1^{(k)}$ koristi II modifikacija Ojlerove metode, a za konstrukciju $x_2^{(k)}$ Ojlerova metoda. Napomena: $x_1^{(k)} \approx x_1(t_k)$, $x_2^{(k)} \approx x_2(t_k)$, gde je $t_k = kh, \ h = const, \ k = 0, 1, 2, ...$

b) Koji je red tačnosti primenjene metode?