SREDNJEKVADRATNE APROKSIMACIJE

Gradimir V. Milovanović

MF, Beograd, 21. mart 2011.

Prostor $L^2(a,b)$ (kontinualna aproksimacija):

$$L^2(a,b) = \left\{ f \,:\, \|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(t)|^2 \, dt \right)^{1/2} < +\infty \right\}$$

Prostor $L^2(a,b)$ (kontinualna aproksimacija):

$$L^2(a,b) = \left\{ f \,:\, \|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(t)|^2 \, dt \right)^{1/2} < +\infty \right\}$$

- Opštije, L^2_μ sa merom (težinom) $d\mu(t) = w(t)\, dt$ (+ za realne funkcije),

$$L^2_\mu(a,b) = \left\{ f \,:\, \|f\|_2 = \left(\int_a^b f(t)^2 w(t) \, dt \right)^{1/2} < +\infty \right\}$$

Prostor $L^2(a,b)$ (kontinualna aproksimacija):

$$L^2(a,b) = \left\{ f \,:\, \|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(t)|^2 \, dt \right)^{1/2} < +\infty \right\}$$

- Opštije, L^2_μ sa merom (težinom) $d\mu(t) = w(t)\, dt$ (+ za realne funkcije),

$$L^2_\mu(a,b) = \left\{ f \,:\, \|f\|_2 = \left(\int_a^b f(t)^2 w(t) \, dt \right)^{1/2} < +\infty \right\}$$

- $w(t)$ – **težinska** (nenegativna) funkcija

Prostor ℓ^2 (diskretna aproksimacija):

- Skup čvorova: $X_m = \{x_1, \ldots, x_m\}$

Prostor ℓ^2 (diskretna aproksimacija):

- Skup čvorova: $X_m = \{x_1, \ldots, x_m\}$
- Informacije za aproksimaciju: $\{x_k, f(x_k)\}_{k=1}^m$

$$\|f\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{m} f(x_k)^2 \right)^{1/2}$$

Prostor ℓ^2 (diskretna aproksimacija):

- Skup čvorova: $X_m = \{x_1, \ldots, x_m\}$
- Informacije za aproksimaciju: $\{x_k, f(x_k)\}_{k=1}^m$

$$\|f\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{m} f(x_k)^2 \right)^{1/2}$$

- Težinska aproksimacija: $w_k = w(x_k) > 0$

$$\|f\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{m} w_k f(x_k)^2 \right)^{1/2}$$

Prostor ℓ^2 (diskretna aproksimacija):

- Skup čvorova: $X_m = \{x_1, \ldots, x_m\}$
- Informacije za aproksimaciju: $\{x_k, f(x_k)\}_{k=1}^m$

$$\|f\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{m} f(x_k)^2 \right)^{1/2}$$

- Težinska aproksimacija: $w_k = w(x_k) > 0$

$$\|f\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{m} w_k f(x_k)^2 \right)^{1/2}$$

- w_k – **težinski koeficijenti**

- Polinomska aproksimaciona funkcija:
  $\phi = p_n \in \mathcal{P}_n$

- Polinomska aproksimaciona funkcija: $\phi = p_n \in \mathcal{P}_n$
- Minimizacija rastojanja: $d(f, p_n) = \|f - p_n\|_2$

- Polinomska aproksimaciona funkcija: $\phi = p_n \in \mathcal{P}_n$
- Minimizacija rastojanja: $d(f, p_n) = \|f - p_n\|_2$

$$\min_{p_n \in \mathcal{P}_n} \|f - p_n\|_2^2$$

- Polinomska aproksimaciona funkcija: $\phi = p_n \in \mathcal{P}_n$
- Minimizacija rastojanja: $d(f, p_n) = \|f - p_n\|_2$

$$\min_{p_n \in \mathcal{P}_n} \|f - p_n\|_2^2$$

tj.

$$\min_{p_n \in \mathcal{P}_n} \int_a^b [f(t) - p_n(t)]^2 w(t)\, dt$$

- Polinomska aproksimaciona funkcija: $\phi = p_n \in \mathcal{P}_n$
- Minimizacija rastojanja: $d(f, p_n) = \|f - p_n\|_2$

$$\min_{p_n \in \mathcal{P}_n} \|f - p_n\|_2^2$$

tj.

$$\min_{p_n \in \mathcal{P}_n} \int_a^b [f(t) - p_n(t)]^2 w(t)\, dt$$

ili

$$\min_{p_n \in \mathcal{P}_n} \sum_{k=1}^{m} w_k [f(x_k) - p_n(x_k)]^2$$

Primer: Aproksimacija $f(t) = \sin \pi t$ na $[-1, 1]$

Primer: Aproksimacija $f(t) = \sin \pi t$ na $[-1, 1]$ u skupu $\mathcal{P}_3$:

$$\sin \pi t \approx a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 = a_1 t + a_3 t^3 = p_3(t)$$

Primer: Aproksimacija $f(t) = \sin \pi t$ na $[-1, 1]$ u skupu $\mathcal{P}_3$:

$$\sin \pi t \approx a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 = a_1 t + a_3 t^3 = p_3(t)$$

(**neparnost** funkcije f na $[-1, 1]$). Minimizacija

Primer: Aproksimacija $f(t) = \sin \pi t$ na $[-1, 1]$ u skupu $\mathcal{P}_3$:

$$\sin \pi t \approx a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 = a_1 t + a_3 t^3 = p_3(t)$$

(**neparnost** funkcije f na $[-1, 1]$). Minimizacija

$$\int_{-1}^{1} \left(\sin \pi t - a_1 t - a_3 t^3\right)^2 \, dt =: F(a_1, a_3)$$

Primer: Aproksimacija $f(t) = \sin \pi t$ na $[-1, 1]$ u skupu $\mathcal{P}_3$:

$$\sin \pi t \approx a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 = a_1 t + a_3 t^3 = p_3(t)$$

(**neparnost** funkcije f na $[-1, 1]$). Minimizacija

$$\int_{-1}^{1} \left(\sin \pi t - a_1 t - a_3 t^3\right)^2 \, dt =: F(a_1, a_3)$$

zahteva

$$\frac{\partial F}{\partial a_1} = -2 \int_{-1}^{1} \left(\sin \pi t - a_1 t - a_3 t^3\right) t \, dt = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial a_3} = -2 \int_{-1}^{1} \left(\sin \pi t - a_1 t - a_3 t^3\right) t^3 \, dt = 0.$$

Sistem jednačina:

$$\frac{1}{3}a_1 + \frac{1}{5}a_3 = \int_0^1 t \sin \pi t \, dt = \frac{1}{\pi},$$

$$\frac{1}{5}a_1 + \frac{1}{7}a_3 = \int_0^1 t^3 \sin \pi t \, dt = \frac{1}{\pi} - \frac{6}{\pi^3}$$

Sistem jednačina:

$$\frac{1}{3}a_1 + \frac{1}{5}a_3 = \int_0^1 t \sin \pi t \, dt = \frac{1}{\pi},$$

$$\frac{1}{5}a_1 + \frac{1}{7}a_3 = \int_0^1 t^3 \sin \pi t \, dt = \frac{1}{\pi} - \frac{6}{\pi^3}$$

daje

$$a_1 = \frac{315}{2\pi^3} - \frac{15}{2\pi}, \qquad a_3 = \frac{35\left(\pi^2 - 15\right)}{2\pi^3},$$

Sistem jednačina:

$$\frac{1}{3}a_1 + \frac{1}{5}a_3 = \int_0^1 t \sin \pi t \, dt = \frac{1}{\pi},$$

$$\frac{1}{5}a_1 + \frac{1}{7}a_3 = \int_0^1 t^3 \sin \pi t \, dt = \frac{1}{\pi} - \frac{6}{\pi^3}$$

daje

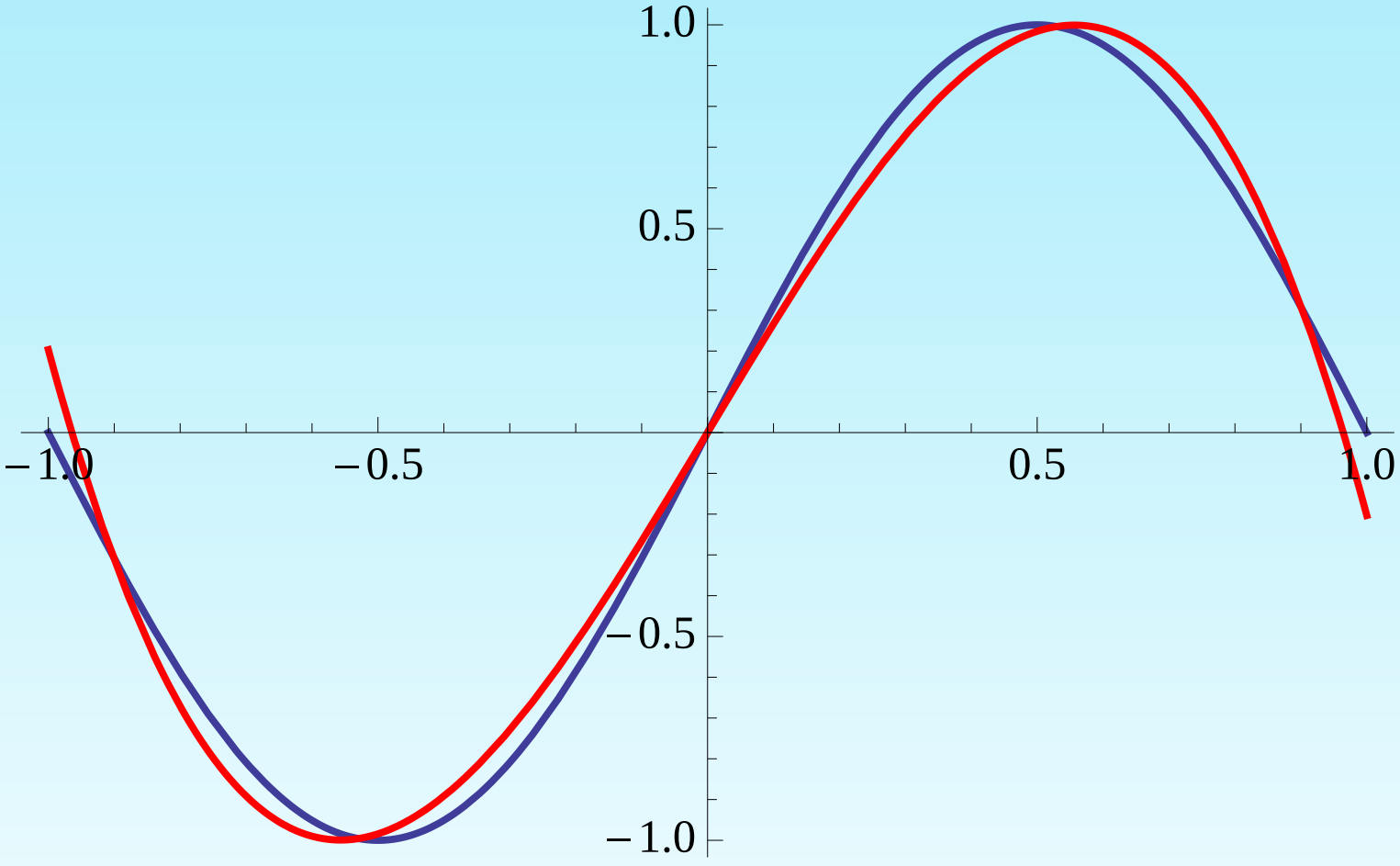
$$a_1 = \frac{315}{2\pi^3} - \frac{15}{2\pi}, \qquad a_3 = \frac{35\left(\pi^2 - 15\right)}{2\pi^3},$$

tj.

$$a_1 = 2.69229, \qquad a_3 = -2.8956.$$

Funkcija $f(t)$ i aproksimacioni polinom $p_3(t)$

Funkcija $f(t)$ i aproksimacioni polinom $p_3(t)$



Pogodnost: postojanje skalarnog proizvoda

- (f, g) u prostorima $X = L^2(a, b)$ ili ℓ^2

Pogodnost: postojanje skalarnog proizvoda

- (f, g) u prostorima $X = L^2(a, b)$ ili ℓ^2
- $\|f\| = \|f\|_2 := \sqrt{(f, f)}$

Pogodnost: postojanje skalarnog proizvoda

- (f, g) u prostorima $X = L^2(a, b)$ ili ℓ^2
- $\|f\| = \|f\|_2 := \sqrt{(f, f)}$
- Osobine ($f, g, h \in X$, $\alpha \in \mathbb{C}$ (skalar)):

(a)	$(f + g, h) = (f, h) + (g, h)$	(linearnost)
(b)	$(\alpha f, g) = \alpha(f, g)$	(homogenost)
(c)	$(f, g) = \overline{(g, f)}$	(hermitska simetrija)
(d)	$(f, f) \geq 0,\ (f, f) = 0 \iff f = 0$	(pozitivnost)

Pogodnost: postojanje skalarnog proizvoda

- (f, g) u prostorima $X = L^2(a, b)$ ili ℓ^2
- $\|f\| = \|f\|_2 := \sqrt{(f, f)}$
- Osobine ($f, g, h \in X$, $\alpha \in \mathbb{C}$ (skalar)):

(a)	$(f + g, h) = (f, h) + (g, h)$	(linearnost)
(b)	$(\alpha f, g) = \alpha(f, g)$	(homogenost)
(c)	$(f, g) = \overline{(g, f)}$	(hermitska simetrija)
(d)	$(f, f) \geq 0,\ (f, f) = 0 \iff f = 0$	(pozitivnost)

- **Realni prostor X:** osobina (c) je simetričnost

Pogodnost: postojanje skalarnog proizvoda

- (f, g) u prostorima $X = L^2(a, b)$ ili ℓ^2
- $\|f\| = \|f\|_2 := \sqrt{(f, f)}$
- Osobine ($f, g, h \in X$, $\alpha \in \mathbb{C}$ (skalar)):

(a)	$(f + g, h) = (f, h) + (g, h)$	(linearnost)
(b)	$(\alpha f, g) = \alpha(f, g)$	(homogenost)
(c)	$(f, g) = \overline{(g, f)}$	(hermitska simetrija)
(d)	$(f, f) \geq 0,\ (f, f) = 0 \iff f = 0$	(pozitivnost)

- **Realni prostor X:** osobina (c) je simetričnost
- C-S-B nejednakost:

$$|(f, g)| \leq \|f\| \|g\| \quad (f, g \in X)$$

- Sistem S sastavljen od ne-nula elemenata prostora X se naziva *ortogonalan* ako $(f, g) = 0$ za svako $f \neq g$ $(f, g \in S)$

- Sistem S sastavljen od ne-nula elemenata prostora X se naziva *ortogonalan* ako $(f, g) = 0$ za svako $f \neq g$ $(f, g \in S)$
- Ako je $(f, f) = 1$ za svako $f \in S$, za sistem se kaže da je *ortonormalan*

- Sistem S sastavljen od ne-nula elemenata prostora X se naziva *ortogonalan* ako $(f, g) = 0$ za svako $f \neq g$ $(f, g \in S)$
- Ako je $(f, f) = 1$ za svako $f \in S$, za sistem se kaže da je *ortonormalan*
- Najčešći ortogonalni sistemi:

- Sistem S sastavljen od ne-nula elemenata prostora X se naziva *ortogonalan* ako $(f, g) = 0$ za svako $f \neq g$ $(f, g \in S)$
- Ako je $(f, f) = 1$ za svako $f \in S$, za sistem se kaže da je *ortonormalan*
- Najčešći ortogonalni sistemi:

  Polinomialni sistemi (algebarski i trigonometrijski)

- Sistem S sastavljen od ne-nula elemenata prostora X se naziva *ortogonalan* ako $(f, g) = 0$ za svako $f \neq g$ $(f, g \in S)$
- Ako je $(f, f) = 1$ za svako $f \in S$, za sistem se kaže da je *ortonormalan*
- Najčešći ortogonalni sistemi:

  Polinomialni sistemi (algebarski i trigonometrijski)

  Nepolinomialni sistemi (npr. Müntzovi sistemi, Malmquist-Takenaka sistemi, generalisani eksponencijalni sistemi, itd.)

Gram-Schmidtov postupak ortogonalizacije

Gram-Schmidtov postupak ortogonalizacije

$$U = \{g_0, g_1, g_2, \ldots\} \quad \rightarrow \quad S = \{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$$

Gram-Schmidtov postupak ortogonalizacije

$$U = \{g_0, g_1, g_2, \ldots\} \quad \rightarrow \quad S = \{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$$

- **Konstrukcija nestabilna kada broj funkcija koje se ortogonalizuju raste!**

► Fourierov razvoj i najbolja aproksimacija

- **Fourierov razvoj i najbolja aproksimacija**

$f \in X, \quad S$ ortonormirani sistem funkcija:

$$f(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} f_k \varphi_k(t), \qquad f_k = (f, \varphi_k)$$

▶ Fourierov razvoj i najbolja aproksimacija

$f \in X, \quad S$ ortonormirani sistem funkcija:

$$f(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} f_k \varphi_k(t), \qquad f_k = (f, \varphi_k)$$

f_k – Fourierovi koeficijenti:

$$|f_k| = |(f, \varphi_k)| \leq \|f\| \|\varphi_k\| = \|f\|$$

- **Fourierov razvoj i najbolja aproksimacija**

  $f \in X, \quad S$ ortonormirani sistem funkcija:

$$f(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} f_k \varphi_k(t), \qquad f_k = (f, \varphi_k)$$

  f_k – Fourierovi koeficijenti:

$$|f_k| = |(f, \varphi_k)| \leq \|f\| \|\varphi_k\| = \|f\|$$

- Parcijalna suma Fourierovog razvoja igra značajnu ulogu u teoriji aproksimacija

$$s_n(t) = \sum_{k=0}^{n} f_k \varphi_k(t).$$

- **Teorema.** *Neka* $f \in X$ *i neka je* X_n *potprostor od* X *generisan bazom* $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$. *Tada je*

$$\min_{\varphi \in X_n} \|f - \varphi\|^2 = \|f - s_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} |f_k|^2.$$

- **Teorema.** *Neka $f \in X$ i neka je X_n potprostor od X generisan bazom $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$. Tada je*

$$\min_{\varphi \in X_n} \|f - \varphi\|^2 = \|f - s_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} |f_k|^2.$$

- **Dokaz.** Neka je $\varphi = \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_k$. Tada

$$\|f - \varphi\|^2 = (f - \varphi, f - \varphi) = (f, f) - (f, \varphi) - (\varphi, f) + (\varphi, \varphi).$$

- **Teorema.** *Neka $f \in X$ i neka je X_n potprostor od X generisan bazom $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$. Tada je*

$$\min_{\varphi \in X_n} \|f - \varphi\|^2 = \|f - s_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} |f_k|^2.$$

- **Dokaz.** Neka je $\varphi = \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_k$. Tada

$$\|f - \varphi\|^2 = (f - \varphi, f - \varphi) = (f, f) - (f, \varphi) - (\varphi, f) + (\varphi, \varphi).$$

Kako su

$$(f, \varphi) = \sum_{k=0}^{n} \overline{a}_k (f, \varphi_k) = \sum_{k=0}^{n} \overline{a}_k f_k, \quad (\varphi, f) = \sum_{k=0}^{n} a_k \overline{f}_k$$

- **Teorema.** *Neka $f \in X$ i neka je X_n potprostor od X generisan bazom $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$. Tada je*

$$\min_{\varphi \in X_n} \|f - \varphi\|^2 = \|f - s_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} |f_k|^2.$$

- **Dokaz.** Neka je $\varphi = \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_k$. Tada

$$\|f - \varphi\|^2 = (f - \varphi, f - \varphi) = (f, f) - (f, \varphi) - (\varphi, f) + (\varphi, \varphi).$$

Kako su

$$(f, \varphi) = \sum_{k=0}^{n} \overline{a}_k (f, \varphi_k) = \sum_{k=0}^{n} \overline{a}_k f_k, \quad (\varphi, f) = \sum_{k=0}^{n} a_k \overline{f}_k$$

i zbog ortogonalnosti, $(\varphi, \varphi) = \sum_{k=0}^{n} a_k \overline{a}_k$, imamo

i zbog ortogonalnosti, $(\varphi, \varphi) = \sum_{k=0}^{n} a_k \overline{a}_k$, imamo

$$\|f - \varphi\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} |f_k|^2 + \sum_{k=0}^{n} (f_k \overline{f}_k - \overline{a}_k f - a_k \overline{f}_k + a_k \overline{a}_k)$$

i zbog ortogonalnosti, $(\varphi, \varphi) = \sum_{k=0}^{n} a_k \overline{a}_k$, imamo

$$\|f - \varphi\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} |f_k|^2 + \sum_{k=0}^{n} (f_k \overline{f}_k - \overline{a}_k f - a_k \overline{f}_k + a_k \overline{a}_k)$$

$$= \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} |f_k|^2 + \sum_{k=0}^{n} |f_k - a_k|^2.$$

i zbog ortogonalnosti, $(\varphi, \varphi) = \sum_{k=0}^{n} a_k \overline{a}_k$, imamo

$$\|f - \varphi\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} |f_k|^2 + \sum_{k=0}^{n} (f_k \overline{f}_k - \overline{a}_k f - a_k \overline{f}_k + a_k \overline{a}_k)$$

$$= \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} |f_k|^2 + \sum_{k=0}^{n} |f_k - a_k|^2.$$

Minimum nastupa ako i samo ako je

$$a_k = f_k \qquad \text{za svako} \quad k = 1, \ldots, n.$$

i zbog ortogonalnosti, $(\varphi, \varphi) = \sum_{k=0}^{n} a_k \overline{a}_k$, imamo

$$\|f - \varphi\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} |f_k|^2 + \sum_{k=0}^{n} (f_k \overline{f}_k - \overline{a}_k f - a_k \overline{f}_k + a_k \overline{a}_k)$$

$$= \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} |f_k|^2 + \sum_{k=0}^{n} |f_k - a_k|^2.$$

Minimum nastupa ako i samo ako je

$$a_k = f_k \qquad \text{za svako} \quad k = 1, \ldots, n.$$

- Dakle, $\varphi = s_n$. Q.E.D.

i zbog ortogonalnosti, $(\varphi, \varphi) = \sum_{k=0}^{n} a_k \overline{a}_k$, imamo

$$\|f - \varphi\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} |f_k|^2 + \sum_{k=0}^{n} (f_k \overline{f}_k - \overline{a}_k f - a_k \overline{f}_k + a_k \overline{a}_k)$$

$$= \|f\|^2 - \sum_{k=0}^{n} |f_k|^2 + \sum_{k=0}^{n} |f_k - a_k|^2.$$

Minimum nastupa ako i samo ako je

$$a_k = f_k \qquad \text{za svako} \quad k = 1, \ldots, n.$$

- Dakle, $\varphi = s_n$. Q.E.D.

- Kako je $(f, s_n) = (s_n, s_n) = \sum_{k=0}^{n} |f_k|^2,$

- Kako je $(f, s_n) = (s_n, s_n) = \sum_{k=0}^{n} |f_k|^2$,

  greška $e_n = f - s_n$ kod **najbolje aproksimacije** je **ortogonalna** na s_n,

$$(e_n, s_n) = (f - s_n, s_n) = 0.$$

- Kako je $(f, s_n) = (s_n, s_n) = \sum_{k=0}^{n} |f_k|^2$,

  greška $e_n = f - s_n$ kod **najbolje aproksimacije** je **ortogonalna** na s_n,

$$(e_n, s_n) = (f - s_n, s_n) = 0.$$

- Također, za svako $k = 0, 1, \ldots, n$,

$$(f - s_n, \varphi_k) = \left(f - \sum_{\nu=0}^{n} f_\nu \varphi_\nu, \varphi_k \right) = (f, \varphi_k) - \sum_{\nu=0}^{n} f_\nu (\varphi_\nu, \varphi_k) = 0.$$

- Kako je $(f, s_n) = (s_n, s_n) = \sum_{k=0}^{n} |f_k|^2$,

  greška $e_n = f - s_n$ kod **najbolje aproksimacije** je **ortogonalna** na s_n,

$$(e_n, s_n) = (f - s_n, s_n) = 0.$$

- Također, za svako $k = 0, 1, \ldots, n$,

$$(f - s_n, \varphi_k) = \left(f - \sum_{\nu=0}^{n} f_\nu \varphi_\nu, \varphi_k \right) = (f, \varphi_k) - \sum_{\nu=0}^{n} f_\nu (\varphi_\nu, \varphi_k) = 0.$$

- Dakle, $(\forall k) \quad e_n \perp \varphi_k$, tj. $e_n \perp X_n$.

- Kako je $X_0 \subset X_1 \subset X_2 \subset \cdots$ imamo

- Kako je $X_0 \subset X_1 \subset X_2 \subset \cdots$ imamo

$$\|f - s_0\| \geq \|f - s_1\| \geq \|f - s_2\| \geq \cdots$$

- Kako je $X_0 \subset X_1 \subset X_2 \subset \cdots$ imamo

$$\|f - s_0\| \geq \|f - s_1\| \geq \|f - s_2\| \geq \cdots$$

- **Besselova nejednakost.** Za svako $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n} |f_k|^2 \leq \|f\|^2.$$

- Kako je $X_0 \subset X_1 \subset X_2 \subset \cdots$ imamo

$$\|f - s_0\| \geq \|f - s_1\| \geq \|f - s_2\| \geq \cdots$$

- **Besselova nejednakost.** Za svako $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n} |f_k|^2 \leq \|f\|^2.$$

- Kada $n \to +\infty$, imamo $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} |f_k|^2 \leq \|f\|^2$.

- Kako je $X_0 \subset X_1 \subset X_2 \subset \cdots$ imamo

$$\|f - s_0\| \geq \|f - s_1\| \geq \|f - s_2\| \geq \cdots$$

- **Besselova nejednakost.** Za svako $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n} |f_k|^2 \leq \|f\|^2.$$

- Kada $n \to +\infty$, imamo $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} |f_k|^2 \leq \|f\|^2$.
- Red **konvergira**: $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} f_k = \lim_{k\to+\infty} (f, \varphi_k) = 0.$

- Kako je $X_0 \subset X_1 \subset X_2 \subset \cdots$ imamo

$$\|f - s_0\| \geq \|f - s_1\| \geq \|f - s_2\| \geq \cdots$$

- **Besselova nejednakost.** Za svako $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n} |f_k|^2 \leq \|f\|^2.$$

- Kada $n \to +\infty$, imamo $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} |f_k|^2 \leq \|f\|^2$.
- Red **konvergira**: $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} f_k = \lim_{k\to+\infty} (f, \varphi_k) = 0$.
- $\forall f \in X$ **Fourierovi koeficijenti** teže nuli.

- Kako je $X_0 \subset X_1 \subset X_2 \subset \cdots$ imamo

$$\|f - s_0\| \geq \|f - s_1\| \geq \|f - s_2\| \geq \cdots$$

- **Besselova nejednakost.** Za svako $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n} |f_k|^2 \leq \|f\|^2.$$

- Kada $n \to +\infty$, imamo $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} |f_k|^2 \leq \|f\|^2$.
- Red **konvergira**: $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} f_k = \lim_{k\to+\infty} (f, \varphi_k) = 0$.
- $\forall f \in X$ **Fourierovi koeficijenti** teže nuli.
- **Parsevalova jednakost**: Kada je S gusto u X

1. Ortogonalni polinomi na realnoj pravoj

$$(f, g) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(t)\ d\mu(t)$$

1. Ortogonalni polinomi na realnoj pravoj

$$(f,g) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(t)\, d\mu(t)$$

$d\mu(t)$–nenegativna mera na $\mathbb{R}$ sa konačnim ili neograničenim nosačem, za koju su svi momenti $\mu_k = \int_{\mathbb{R}} t^k d\mu(t)$ konačni i $\mu_0 = \int_{\mathbb{R}} d\mu(t) > 0$

1. Ortogonalni polinomi na realnoj pravoj

$$(f,g) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(t)\, d\mu(t)$$

$d\mu(t)$–nenegativna mera na $\mathbb{R}$ sa konačnim ili neograničenim nosačem, za koju su svi momenti $\mu_k = \int_{\mathbb{R}} t^k d\mu(t)$ konačni i $\mu_0 = \int_{\mathbb{R}} d\mu(t) > 0$

$$\mu = \mu_{\text{ac}} + \mu_{\text{s}} + \mu_{\text{j}}$$

1. Ortogonalni polinomi na realnoj pravoj

$$(f,g) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(t)\, d\mu(t)$$

$d\mu(t)$–nenegativna mera na $\mathbb{R}$ sa konačnim ili neograničenim nosačem, za koju su svi momenti $\mu_k = \int_{\mathbb{R}} t^k d\mu(t)$ konačni i $\mu_0 = \int_{\mathbb{R}} d\mu(t) > 0$

$$\mu = \mu_{\text{ac}} + \mu_{\text{s}} + \mu_{\text{j}}$$

$$\mu = \mu_{\text{ac}} \quad \Longrightarrow \quad d\mu(t) = w(t)dt, \quad w(t) \geq 0$$

1. Ortogonalni polinomi na realnoj pravoj

$$(f,g) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(t)\, d\mu(t)$$

$d\mu(t)$–nenegativna mera na $\mathbb{R}$ sa konačnim ili neograničenim nosačem, za koju su svi momenti $\mu_k = \int_{\mathbb{R}} t^k d\mu(t)$ konačni i $\mu_0 = \int_{\mathbb{R}} d\mu(t) > 0$

$$\mu = \mu_{\text{ac}} + \mu_{\text{s}} + \mu_{\text{j}}$$

$$\mu = \mu_{\text{ac}} \quad \Longrightarrow \quad d\mu(t) = w(t)dt, \quad w(t) \geq 0$$

w – nenegativna težinska funkcija

- Gram-Schmidt-ova ortogonalizacija
  $U = \{1, t, t^2, \ldots\}$ daje $S = \{\pi_0, \pi_1, \pi_2, \ldots\}$

- Gram-Schmidt-ova ortogonalizacija
  $U = \{1, t, t^2, \ldots\}$ daje $S = \{\pi_0, \pi_1, \pi_2, \ldots\}$
- monični ortogonalni polinomi

$$\pi_k(t) = t^k + \text{članovi nižeg stepena}, \; k = 0, 1, \ldots$$

- Gram-Schmidt-ova ortogonalizacija
  $U = \{1, t, t^2, \ldots\}$ daje $S = \{\pi_0, \pi_1, \pi_2, \ldots\}$
- monični ortogonalni polinomi

$$\pi_k(t) = t^k + \text{članovi nižeg stepena}, \ k = 0, 1, \ldots$$

- ortogonalnost

$$(\pi_k, \pi_n) = \|\pi_n\|^2 \delta_{kn} = \begin{cases} 0, & n \neq k, \\ \|\pi_n\|^2, & n = k. \end{cases}$$

Tročlana rekurentna relacija (TČRR)

- Zbog osobine $(tf, g) = (f, tg)$

$$\pi_{k+1}(t) = (t - \alpha_k)\pi_k(t) - \beta_k \pi_{k-1}(t), \quad k = 0, 1, \ldots,$$
$$\pi_0(t) = 1, \ \pi_{-1}(t) = 0.$$

$(\alpha_k) = (\alpha_k(\, d\mu))$, $(\beta_k) = (\beta_k(\, d\mu))$ – nizovi

Tročlana rekurentna relacija (TČRR)

- Zbog osobine $(tf, g) = (f, tg)$

$$\pi_{k+1}(t) = (t - \alpha_k)\pi_k(t) - \beta_k \pi_{k-1}(t), \quad k = 0, 1, \ldots,$$
$$\pi_0(t) = 1, \ \pi_{-1}(t) = 0.$$

$(\alpha_k) = (\alpha_k(\, d\mu))$, $(\beta_k) = (\beta_k(\, d\mu))$ – nizovi

- Pogodno je uzeti $\beta_0 = \int_{\mathbb{R}} d\mu(t)$

Tročlana rekurentna relacija (TČRR)

- Zbog osobine $(tf, g) = (f, tg)$

$$\pi_{k+1}(t) = (t - \alpha_k)\pi_k(t) - \beta_k \pi_{k-1}(t), \quad k = 0, 1, \ldots,$$
$$\pi_0(t) = 1, \ \pi_{-1}(t) = 0.$$

$(\alpha_k) = (\alpha_k(\, d\mu))$, $(\beta_k) = (\beta_k(\, d\mu))$ – nizovi

- Pogodno je uzeti $\beta_0 = \int_{\mathbb{R}} d\mu(t)$
- Klasični ortogonalni polinomi ($\alpha, \beta > -1$)

Tročlana rekurentna relacija (TČRR)

- Zbog osobine $(tf, g) = (f, tg)$

$$\pi_{k+1}(t) = (t - \alpha_k)\pi_k(t) - \beta_k \pi_{k-1}(t), \quad k = 0, 1, \ldots,$$
$$\pi_0(t) = 1, \ \pi_{-1}(t) = 0.$$

$(\alpha_k) = (\alpha_k(\, d\mu))$, $(\beta_k) = (\beta_k(\, d\mu))$ – nizovi

- Pogodno je uzeti $\beta_0 = \int_{\mathbb{R}} d\mu(t)$
- Klasični ortogonalni polinomi ($\alpha, \beta > -1$)

$(-1, 1) \quad w(x) = (1 - t)^\alpha (1 + t)^\beta$ Jacobi

Tročlana rekurentna relacija (TČRR)

- Zbog osobine $(tf, g) = (f, tg)$

$$\pi_{k+1}(t) = (t - \alpha_k)\pi_k(t) - \beta_k \pi_{k-1}(t), \quad k = 0, 1, \ldots,$$
$$\pi_0(t) = 1, \ \pi_{-1}(t) = 0.$$

$(\alpha_k) = (\alpha_k(\, d\mu))$, $(\beta_k) = (\beta_k(\, d\mu))$ – nizovi

- Pogodno je uzeti $\beta_0 = \int_{\mathbb{R}} d\mu(t)$
- Klasični ortogonalni polinomi ($\alpha, \beta > -1$)

$(-1, 1) \quad w(x) = (1-t)^\alpha (1+t)^\beta$ Jacobi

$(0, +\infty) \quad w(t) = t^\alpha e^{-t}$ gen. Laguerre

Tročlana rekurentna relacija (TČRR)

- Zbog osobine $(tf, g) = (f, tg)$

$$\pi_{k+1}(t) = (t - \alpha_k)\pi_k(t) - \beta_k \pi_{k-1}(t), \quad k = 0, 1, \ldots,$$
$$\pi_0(t) = 1, \ \pi_{-1}(t) = 0.$$

$(\alpha_k) = (\alpha_k(\, d\mu))$, $(\beta_k) = (\beta_k(\, d\mu))$ – nizovi

- Pogodno je uzeti $\beta_0 = \int_{\mathbb{R}} d\mu(t)$
- Klasični ortogonalni polinomi ($\alpha, \beta > -1$)

$(-1, 1) \quad w(x) = (1-t)^\alpha (1+t)^\beta$ Jacobi

$(0, +\infty) \quad w(t) = t^\alpha e^{-t}$ gen. Laguerre

$(-\infty, +\infty) \quad w(t) = e^{-t^2}$ Hermite

Jacobijeva matrica

$$\boldsymbol{J}_n(\,d\mu) = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \sqrt{\beta_1} & & & \mathbf{0} \\ \sqrt{\beta_1} & \alpha_1 & \sqrt{\beta_2} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \sqrt{\beta_{n-1}} \\ \mathbf{0} & & & \sqrt{\beta_{n-1}} & \alpha_{n-1} \end{bmatrix}$$

Jacobijeva matrica

$$\boldsymbol{J}_n(\,d\mu) = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \sqrt{\beta_1} & & & \mathbf{0} \\ \sqrt{\beta_1} & \alpha_1 & \sqrt{\beta_2} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \sqrt{\beta_{n-1}} \\ \mathbf{0} & & & \sqrt{\beta_{n-1}} & \alpha_{n-1} \end{bmatrix}$$

Neklasični ortogonalni polinomi

Jacobijeva matrica

$$\boldsymbol{J}_n(\,d\mu) = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \sqrt{\beta_1} & & & \mathbf{0} \\ \sqrt{\beta_1} & \alpha_1 & \sqrt{\beta_2} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \sqrt{\beta_{n-1}} \\ \mathbf{0} & & & \sqrt{\beta_{n-1}} & \alpha_{n-1} \end{bmatrix}$$

Neklasični ortogonalni polinomi

Numerička konstrukcija α_k, β_k, $k = 0, 1, \ldots, n-1$

Jacobijeva matrica

$$\boldsymbol{J}_n(\,d\mu) = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \sqrt{\beta_1} & & & \mathbf{0} \\ \sqrt{\beta_1} & \alpha_1 & \sqrt{\beta_2} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \sqrt{\beta_{n-1}} \\ \mathbf{0} & & & \sqrt{\beta_{n-1}} & \alpha_{n-1} \end{bmatrix}$$

Neklasični ortogonalni polinomi

Numerička konstrukcija α_k, β_k, $k = 0, 1, \ldots, n-1$

- Metod modifikovanih momenta

Jacobijeva matrica

$$\boldsymbol{J}_n(\,d\mu) = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \sqrt{\beta_1} & & & \mathbf{0} \\ \sqrt{\beta_1} & \alpha_1 & \sqrt{\beta_2} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \sqrt{\beta_{n-1}} \\ \mathbf{0} & & & \sqrt{\beta_{n-1}} & \alpha_{n-1} \end{bmatrix}$$

Neklasični ortogonalni polinomi

Numerička konstrukcija α_k, β_k, $k = 0, 1, \ldots, n-1$

- Metod modifikovanih momenta

- Diskretizovana Stieltjes-Gautschi-jeva procedura