KOŠIJEVI PROBLEMI

1. zadatak

Posmatrajmo sistem diferencijalnih jednačina

$$u_1'(t) = (a_1 - b_1 u_2(t))u_1(t),$$
$$u_2'(t) = (-a_2 + b_2 u_1(t))u_2(t),$$

gde su a_1, a_2, b_1, b_1 zadate pozitivne konstante, a $u_1(t)$ i $u_2(t)$ nepoznate funcije. Ovaj sistem diferencijalnih jednačina je u literaturi poznat pod nazivom Lotka-Volterre jednačine i on odgovara populacionom modelu grabljivice i plena.
Neka su dati početni uslovi $u_1(0) = u_1^0$ i $u_1(0) = u_2^0$, gde su $u_1^0,\ u_2^0$ zadate pozitivne konstante. Tada dobijamo sistem dva "spregnuta" Košijeva problema.

Rešiti spregnuti Košijev sistem sa zadatom tačnošću ε koristeći:

a) Metodu Runge-Kuta reda 3 (Desina knjiga, strana 174);

b) Metodu Runge-Kuta reda 4 (Desina knjiga, strana 174);

Za kriterijum zaustavljanja koristiti Rungeovu ocenu greške (Desina knjiga, strana 175). Uporediti dobijena rešenja sa rešenjima dobijenim pomoću ode45 u Matlabu.

2. zadatak

Posmatrajmo sistem diferencijalnih jednačina

$$f_1'(t) = F_1(t, f_1(t), f_2(t), f_3(t)),$$
$$f_2'(t) = F_2(t, f_1(t), f_2(t), f_3(t)),$$
$$f_3'(t) = F_3(t, f_1(t), f_2(t), f_3(t)),$$

gde su F_1, F_2, F_3 zadate funkcije koje definišu vezu izmedju nezavisne promenljive t i nepoznatih funkcija $f_1(t)$, $f_2(t),\ f_3(t)$.
Neka su dati početni uslovi $f_1(t_0) = f_{10},\ f_2(t_0) = f_{20}$ i $f_3(t_0) = f_{30}$, gde je t_0 zadata početna tačka i f_{10}, f_{20}, f_{30} zadate konstante.

Rešiti spregnuti Košijev sistem koristeći

a) Ojlerovu metodu (skripta, strana 34-35 ili Desina knjiga, strana 172);

b) Modifikaciju I Ojlerove metode (skripta, strana 34-35 ili Desina knjiga, strana 173);

c) Modifikaciju II Ojlerove metode (skripta, strana 34-35 ili Desina knjiga, strana 173);

Za kriterijum zaustavljanja koristiti unapred zadati maksimalan broj iteracija N_{max}.
Testirati dobijeni metod u slučaju da su F_1, F_2 i F_3 linerane funkcije svojih argumenata.

3. zadatak

Date su sledeće funkcije:

$$\beta(t) = \beta_0 - \beta_1 L(t) + \beta_2 F(K, L),$$
$$\gamma(t) = \gamma_0 + \gamma_1 L(t) - \gamma_2 F(K, L),$$

gde su $K = K(t)$, $L = L(t)$ nepoznate funkcije, a $F = F(t) = F(K(t), L(t)) = F(K, L)$ zadata funkcija koja definiše vezu izmedju nezavisne promenljive t i nepoznatih funkcija K i L. Konstante $\beta_i, \gamma_i,\ i = 0, 1, 2$ su unapred zadate i pritom je $\beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2 > 0$.

Posmatrajmo spregnuti sistem:

$$\frac{\delta L}{\delta t} = (\beta(t) - \gamma(t))L(t)$$
$$\frac{\delta K}{\delta t} = s(t)F(K, L) - \delta(t)K(t)$$

gde su $s = s(t)$ i $\delta = \delta(t)$ zadate funkcije (specijalno, moze se uzeti da su funkcije konstantne, odnosno $s = const$ i $\delta = const$). Neka su zadati početni uslovi:

$$L(t_0) = L_0$$

$$K(t_0) = K_0$$

gde su t_0, L_0, K_0 unapred date konstante.
Rešiti spregnuti Košijev sistem sa zadatom tačnošću ε koristeći

a) Metodu Runge-Kuta reda 4 (Desina knjiga, strana 174)

b) Metodu Runge-Kuta reda 4 (Desina knjiga, strana 174);

c) Prediktor-korektor metodu Adamsa (Desina knjiga, strana 176);

d) Prediktor-korektor metodu Milnea (Desina knjiga, strana 176);

Za kriterijum zaustavljanja koristiti Rungeovu ocenu greške (Desina knjiga, strana 175).
Razmatrati sledeće specijalne slučajeve za funkciju F:

a) $F(K, L) = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$, gde su $0 < \alpha < 1$ i $A > 0$ zadate konstante.

b) $F = F(K, L, A, H) = K^{\alpha}H^{\beta}(AL)^{1-\alpha-\beta}$, gde su $0 < \alpha, \beta < 1$, $\alpha + \beta < 1$ zadate konstante. Pritom $A > 0$ je endogena promenljiva koja eksponencijalno raste tokom vremena, tj. $\frac{\dot{A}}{A} = g, g > 0$. Funkcija $H(t)$ je spregnuta sa funkcijom $K(t)$ na sledeći način:
$\dot{K} = s_k Y - \delta_k K$
$\dot{H} = s_h Y - \delta_h H$, gde su $s_k, s_h, \delta_k, \delta_h$ zadate konstante. Napomena: deo pod a) uraditi obavezno, deo pod b) je dosta složen, pa je to opciono.