APROKSIMACIJA FUNKCIJA

Osnovni koncepti

Gradimir V. Milovanović

MF, Beograd, 14. mart 2011.

Osnovni problem u TA

- Kako za **datu funkciju** f iz "velikog" prostora X naći **jednostavnu funkciju** ϕ iz nekog "malog" podskupa $\Phi \subset X$, tako da ϕ bude **bliska** funkciji f u nekom **smislu**.

Osnovni problem u TA

- Kako za **datu funkciju** f iz "velikog" prostora X naći **jednostavnu funkciju** ϕ iz nekog "malog" podskupa $\Phi \subset X$, tako da ϕ bude **bliska** funkciji f u nekom **smislu**.
  - Kažemo da ϕ aproksimira f, tj. $f \sim \phi$

Osnovni problem u TA

- Kako za **datu funkciju** f iz "velikog" prostora X naći **jednostavnu funkciju** ϕ iz nekog "malog" podskupa $\Phi \subset X$, tako da ϕ bude **bliska** funkciji f u nekom **smislu**.
  - Kažemo da ϕ aproksimira f, tj. $f \sim \phi$
  - ϕ je **aproksimacija** ili **aproksimant** za f

Osnovni problem u TA

- Kako za **datu funkciju** f iz "velikog" prostora X naći **jednostavnu funkciju** ϕ iz nekog "malog" podskupa $\Phi \subset X$, tako da ϕ bude **bliska** funkciji f u nekom **smislu**.
  - Kažemo da ϕ aproksimira f, tj. $f \sim \phi$
  - ϕ je **aproksimacija** ili **aproksimant** za f
- Šta je je "veliki" prostor X?

Osnovni problem u TA

- Kako za **datu funkciju** f iz "velikog" prostora X naći **jednostavnu funkciju** ϕ iz nekog "malog" podskupa $\Phi \subset X$, tako da ϕ bude **bliska** funkciji f u nekom **smislu**.
  - Kažemo da ϕ aproksimira f, tj. $f \sim \phi$
  - ϕ je **aproksimacija** ili **aproksimant** za f
- Šta je je "veliki" prostor X?
  - **Normirani linearni prostor** funkcija definisanih na datom skupu A (npr. A može biti kompaktan interval $[a, b]$, kružnica $\mathbb{T}$, itd.)

Osnovni problem u TA

- Kako za **datu funkciju** f iz "velikog" prostora X naći **jednostavnu funkciju** ϕ iz nekog "malog" podskupa $\Phi \subset X$, tako da ϕ bude **bliska** funkciji f u nekom **smislu**.
  - Kažemo da ϕ aproksimira f, tj. $f \sim \phi$
  - ϕ je **aproksimacija** ili **aproksimant** za f
- Šta je je "veliki" prostor X?
  - **Normirani linearni prostor** funkcija definisanih na datom skupu A (npr. A može biti kompaktan interval $[a, b]$, kružnica $\mathbb{T}$, itd.)
  - X može biti prostor neprekidnih funkcija $C[a, b]$,

Osnovni problem u TA

- Kako za **datu funkciju** f iz "velikog" prostora X naći **jednostavnu funkciju** ϕ iz nekog "malog" podskupa $\Phi \subset X$, tako da ϕ bude **bliska** funkciji f u nekom **smislu**.
  - Kažemo da ϕ aproksimira f, tj. $f \sim \phi$
  - ϕ je **aproksimacija** ili **aproksimant** za f
- Šta je je "veliki" prostor X?
  - **Normirani linearni prostor** funkcija definisanih na datom skupu A (npr. A može biti kompaktan interval $[a, b]$, kružnica $\mathbb{T}$, itd.)
  - X može biti prostor neprekidnih funkcija $C[a, b]$, prostor $L^p(a, b)$, ili neki drugi Banachov prostor.

- $C[a,b]$: $\qquad \|f\| = \max\limits_{a \le x \le b} |f(t)|$

- $C[a,b]$: $\qquad \|f\| = \max\limits_{a \le x \le b} |f(t)|$
- $L^p(a,b),\ 1 \le p < +\infty,$

$$L^p(a,b) = \left\{ f \ : \ \|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p \, dt \right)^{1/p} < +\infty \right\}$$

- $C[a,b]$: $\qquad \|f\| = \max\limits_{a \le x \le b} |f(t)|$
- $L^p(a,b),\ 1 \le p < +\infty,$

$$L^p(a,b) = \left\{ f \ : \ \|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p \, dt \right)^{1/p} < +\infty \right\}$$

Opštije $L^p_\mu(a,b)$, sa merom $d\mu$ [$d\mu(t)$ umesto dt]

- $C[a,b]$: $\qquad \|f\| = \max\limits_{a \le x \le b} |f(t)|$
- $L^p(a,b),\ 1 \le p < +\infty,$

$$L^p(a,b) = \left\{ f \ : \ \|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p \, dt \right)^{1/p} < +\infty \right\}$$

Opštije $L^p_\mu(a,b)$, sa merom $d\mu$ [$d\mu(t)$ umesto dt]

- $L^\infty(a,b)$: $\qquad \|f\|_\infty = \sup\limits_{a \le x \le b} |f(t)|$

- $C[a,b]$: $\qquad \|f\| = \max\limits_{a \le x \le b} |f(t)|$
- $L^p(a,b),\ 1 \le p < +\infty,$

$$L^p(a,b) = \left\{ f \ : \ \|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p \, dt \right)^{1/p} < +\infty \right\}$$

Opštije $L^p_\mu(a,b)$, sa merom $d\mu$ [$d\mu(t)$ umesto dt]

- $L^\infty(a,b)$: $\qquad \|f\|_\infty = \sup\limits_{a \le x \le b} |f(t)|$

▶ **Rastojanje** između f i ϕ se **meri** sa $\|f - \phi\|$.

- $C[a,b]$: $\qquad \|f\| = \max\limits_{a \le x \le b} |f(t)|$
- $L^p(a,b),\ 1 \le p < +\infty,$

$$L^p(a,b) = \left\{ f \ : \ \|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p \, dt \right)^{1/p} < +\infty \right\}$$

Opštije $L^p_\mu(a,b)$, sa merom $d\mu$ [$d\mu(t)$ umesto dt]

- $L^\infty(a,b)$: $\qquad \|f\|_\infty = \sup\limits_{a \le x \le b} |f(t)|$

▶ **Rastojanje** između f i ϕ se **meri** sa $\|f - \phi\|$.

▶ **Rastojanje** između f i podskupa Φ je

$$E(f) = \inf_{\phi \in \Phi} \|f - \phi\| \quad \text{(greška najbolje aproksimacije)}$$

- Ako postoji element $\phi^* \in \Phi$ takav da je

$$E(f) = \min_{\phi \in \Phi} \|f - \phi\| = \|f - \phi^*\|$$

- Ako postoji element $\phi^* \in \Phi$ takav da je

$$E(f) = \min_{\phi \in \Phi} \|f - \phi\| = \|f - \phi^*\|$$

kažemo da je ϕ^* **najbolja aproksimacija**.

- Ako postoji element $\phi^* \in \Phi$ takav da je

$$E(f) = \min_{\phi \in \Phi} \|f - \phi\| = \|f - \phi^*\|$$

  kažemo da je ϕ^* **najbolja aproksimacija**.

  – **Egzistencija** i **jedinstvenost** elementa ϕ^*

- Ako postoji element $\phi^* \in \Phi$ takav da je

$$E(f) = \min_{\phi \in \Phi} \|f - \phi\| = \|f - \phi^*\|$$

  kažemo da je ϕ^* **najbolja aproksimacija**.

  – **Egzistencija** i **jedinstvenost** elementa ϕ^*
  – **Algoritmi za nalaženje** elementa ϕ^*

- Ako postoji element $\phi^* \in \Phi$ takav da je

$$E(f) = \min_{\phi \in \Phi} \|f - \phi\| = \|f - \phi^*\|$$

  kažemo da je ϕ^* **najbolja aproksimacija**.
  - **Egzistencija** i **jedinstvenost** elementa ϕ^*
  - **Algoritmi za nalaženje** elementa ϕ^*
- Ako je Φ **konačno dimenzionalni** potprostor od X, tada $\forall f \in X$ **postoji** najbolja aproksimacija!

- Ako postoji element $\phi^* \in \Phi$ takav da je

$$E(f) = \min_{\phi \in \Phi} \|f - \phi\| = \|f - \phi^*\|$$

  kažemo da je ϕ^* **najbolja aproksimacija**.
  - **Egzistencija** i **jedinstvenost** elementa ϕ^*
  - **Algoritmi za nalaženje** elementa ϕ^*
- Ako je Φ **konačno dimenzionalni** potprostor od X, tada $\forall f \in X$ **postoji** najbolja aproksimacija!
- Najbolja aproksimacija **nije uvek jedinstvena**

- Ako postoji element $\phi^* \in \Phi$ takav da je

$$E(f) = \min_{\phi \in \Phi} \|f - \phi\| = \|f - \phi^*\|$$

  kažemo da je ϕ^* **najbolja aproksimacija**.
  - **Egzistencija** i **jedinstvenost** elementa ϕ^*
  - **Algoritmi za nalaženje** elementa ϕ^*
- Ako je Φ **konačno dimenzionalni** potprostor od X, tada $\forall f \in X$ **postoji** najbolja aproksimacija!
- Najbolja aproksimacija **nije uvek jedinstvena**

  U **striktno** normiranim prostorima najbolja aproksimacija je jednistvena!

- Ako postoji element $\phi^* \in \Phi$ takav da je

$$E(f) = \min_{\phi \in \Phi} \|f - \phi\| = \|f - \phi^*\|$$

  kažemo da je ϕ^* **najbolja aproksimacija**.

  – **Egzistencija** i **jedinstvenost** elementa ϕ^*

  – **Algoritmi za nalaženje** elementa ϕ^*

- Ako je Φ **konačno dimenzionalni** potprostor od X, tada $\forall f \in X$ **postoji** najbolja aproksimacija!

- Najbolja aproksimacija **nije uvek jedinstvena**

  U **striktno** normiranim prostorima najbolja aproksimacija je jednistvena!

  $$\|f + g\| = \|f\| + \|g\| \;\Rightarrow\; f = \alpha g \;\; (\alpha \in \mathbb{R})$$

- Kako birati “mali” podskup $\Phi \subset X$?

- Kako birati “mali” podskup $\Phi \subset X$?
- Koji su to pogodni **konstruktivni elementi**?

- Kako birati “mali” podskup $\Phi \subset X$?
- Koji su to pogodni **konstruktivni elementi**?
  - algebarski polinomi

- Kako birati “mali” podskup $\Phi \subset X$?
- Koji su to pogodni **konstruktivni elementi**?
  - algebarski polinomi
  - trigonometrijski polinomi

- Kako birati “mali” podskup $\Phi \subset X$?
- Koji su to pogodni **konstruktivni elementi**?
  - algebarski polinomi
  - trigonometrijski polinomi
  - Müntzovi polinomi

- Kako birati “mali” podskup $\Phi \subset X$?
- Koji su to pogodni **konstruktivni elementi**?
  - algebarski polinomi
  - trigonometrijski polinomi
  - Müntzovi polinomi
  - splajnovi

- Kako birati “mali” podskup $\Phi \subset X$?
- Koji su to pogodni **konstruktivni elementi**?
  - algebarski polinomi
  - trigonometrijski polinomi
  - Müntzovi polinomi
  - splajnovi
  - talasići (wavelets)

- Kako birati “mali” podskup $\Phi \subset X$?
- Koji su to pogodni **konstruktivni elementi**?
  - algebarski polinomi
  - trigonometrijski polinomi
  - Müntzovi polinomi
  - splajnovi
  - talasići (wavelets)
  - racionalne funkcije

- Kako birati “mali” podskup $\Phi \subset X$?
- Koji su to pogodni **konstruktivni elementi**?
  - algebarski polinomi
  - trigonometrijski polinomi
  - Müntzovi polinomi
  - splajnovi
  - talasići (wavelets)
  - racionalne funkcije
  - eksponencijalne funkcije, itd.

- Kako birati “mali” podskup $\Phi \subset X$?
- Koji su to pogodni **konstruktivni elementi**?
  - algebarski polinomi
  - trigonometrijski polinomi
  - Müntzovi polinomi
  - splajnovi
  - talasići (wavelets)
  - racionalne funkcije
  - eksponencijalne funkcije, itd.
- Podskup Φ je skup svih linearnih kombinacija (lineal) konačnog broja (posebno odabranih) linearno nezavisnih elementa iz X.

- Kako birati “mali” podskup $\Phi \subset X$?
- Koji su to pogodni **konstruktivni elementi**?
  - algebarski polinomi
  - trigonometrijski polinomi
  - Müntzovi polinomi
  - splajnovi
  - talasići (wavelets)
  - racionalne funkcije
  - eksponencijalne funkcije, itd.
- Podskup Φ je skup svih linearnih kombinacija (lineal) konačnog broja (posebno odabranih) linearno nezavisnih elementa iz X.
- Tipični primeri $\Phi = \mathcal{P}_n$ ili $\Phi = \mathcal{T}_n$

- $\mathcal{P}_n$ je skup svih algebarskih polinoma stepena ne višeg od n,

$$\phi(t) = p_n(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k \quad (a_k \in \mathbb{R})$$

- $\mathcal{P}_n$ je skup svih algebarskih polinoma stepena ne višeg od n,

$$\phi(t) = p_n(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k \quad (a_k \in \mathbb{R})$$

- $\dim \mathcal{P}_n = n + 1$; Prirodni bazis $\{1, t, \ldots, t^n\}$

- $\mathcal{P}_n$ je skup svih algebarskih polinoma stepena ne višeg od n,

$$\phi(t) = p_n(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k \quad (a_k \in \mathbb{R})$$

- $\dim \mathcal{P}_n = n + 1$; Prirodni bazis $\{1, t, \ldots, t^n\}$

- $\mathcal{T}_n$ je skup svih trigonometrijskih polinoma stepena ne višeg od n,

$$\phi(t) = t_n(t) = a_0 + \sum_{k=0}^{n} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \quad (a_k, b_k \in \mathbb{R})$$

- $\mathcal{P}_n$ je skup svih algebarskih polinoma stepena ne višeg od n,

$$\phi(t) = p_n(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k \quad (a_k \in \mathbb{R})$$

- $\dim \mathcal{P}_n = n + 1$; Prirodni bazis $\{1, t, \ldots, t^n\}$

- $\mathcal{T}_n$ je skup svih trigonometrijskih polinoma stepena ne višeg od n,

$$\phi(t) = t_n(t) = a_0 + \sum_{k=0}^{n} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \quad (a_k, b_k \in \mathbb{R})$$

- $\dim \mathcal{T}_n = 2n + 1$; Trigonometrijski bazis

$$\{1, \cos t, \sin t, \ldots, \cos nt, \sin nt\}$$

- Dve osobine polinoma su esencijalne u teoriji aproksimacija:

- Dve osobine polinoma su esencijalne u teoriji aproksimacija:

1° Svaka realna neprekidna funkcija f na konačnom intervalu $[a, b]$ može se uniformno aproksimirati algebarskim (trigonometrijskim) polinomima.

- Dve osobine polinoma su esencijalne u teoriji aproksimacija:

1° Svaka realna neprekidna funkcija f na konačnom intervalu $[a, b]$ može se uniformno aproksimirati algebarskim (trigonometrijskim) polinomima.

2° Svaki polinom $p_n \in \mathcal{P}_n$ ($t_n \in \mathcal{T}_n$) može se jedinstveno interpolirati u $n + 1$ ($2n + 1$) tačaka.

- Dve osobine polinoma su esencijalne u teoriji aproksimacija:

1° Svaka realna neprekidna funkcija f na konačnom intervalu $[a, b]$ može se uniformno aproksimirati algebarskim (trigonometrijskim) polinomima.

2° Svaki polinom $p_n \in \mathcal{P}_n$ ($t_n \in \mathcal{T}_n$) može se jedinstveno interpolirati u $n + 1$ ($2n + 1$) tačaka.

- Weierstrass (1885):

- Dve osobine polinoma su esencijalne u teoriji aproksimacija:

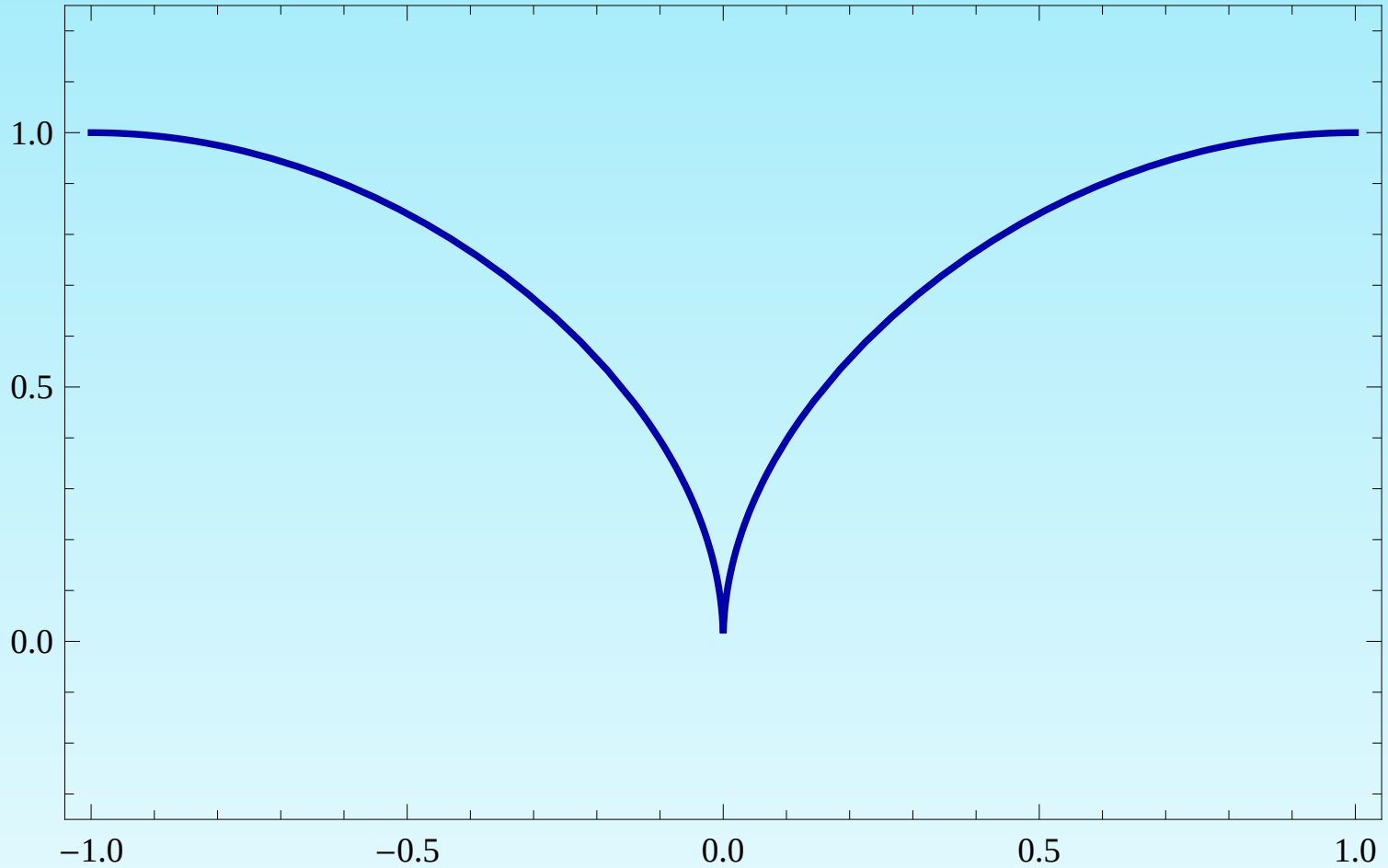
1° Svaka realna neprekidna funkcija f na konačnom intervalu $[a, b]$ može se uniformno aproksimirati algebarskim (trigonometrijskim) polinomima.

2° Svaki polinom $p_n \in \mathcal{P}_n$ ($t_n \in \mathcal{T}_n$) može se jedinstveno interpolirati u $n + 1$ ($2n + 1$) tačaka.

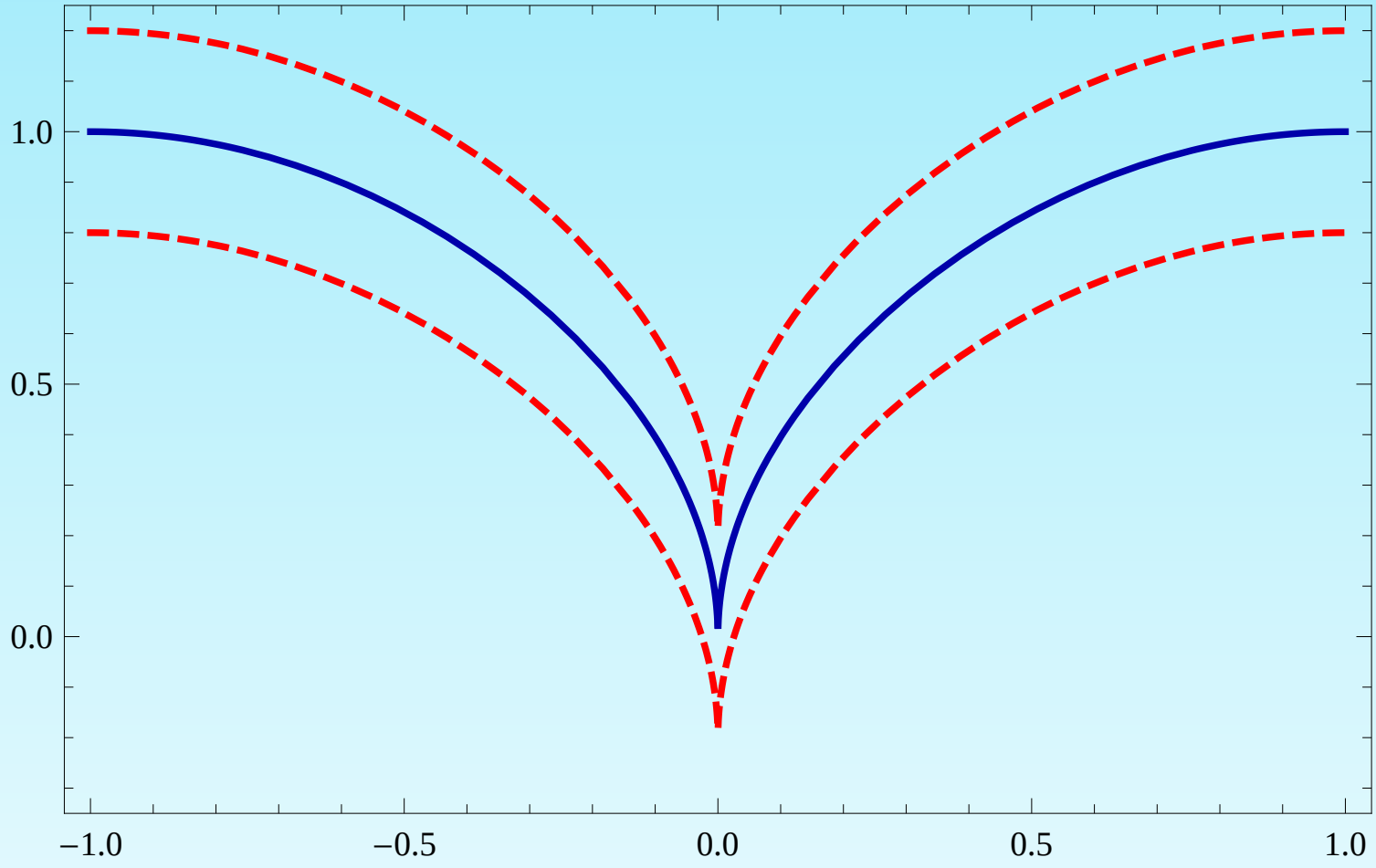
- Weierstrass (1885):

Teorema. *Za svako* $f \in C[a, b]$ *i svako* $\varepsilon > 0$ *postoji algebarski polinom* p *takav da da je*

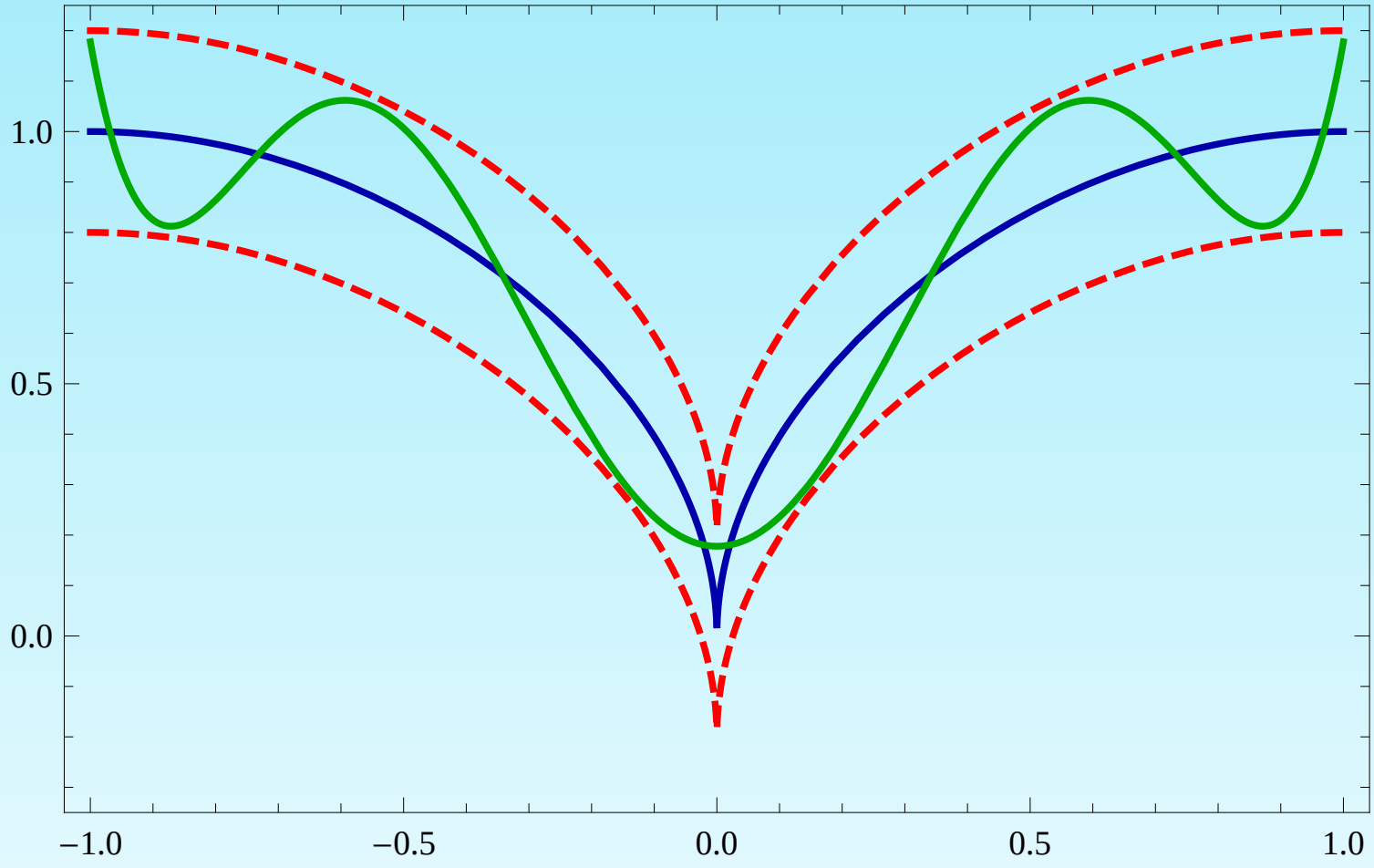
$$|f(t) - p(t)| < \varepsilon \quad (a \leq t \leq b).$$



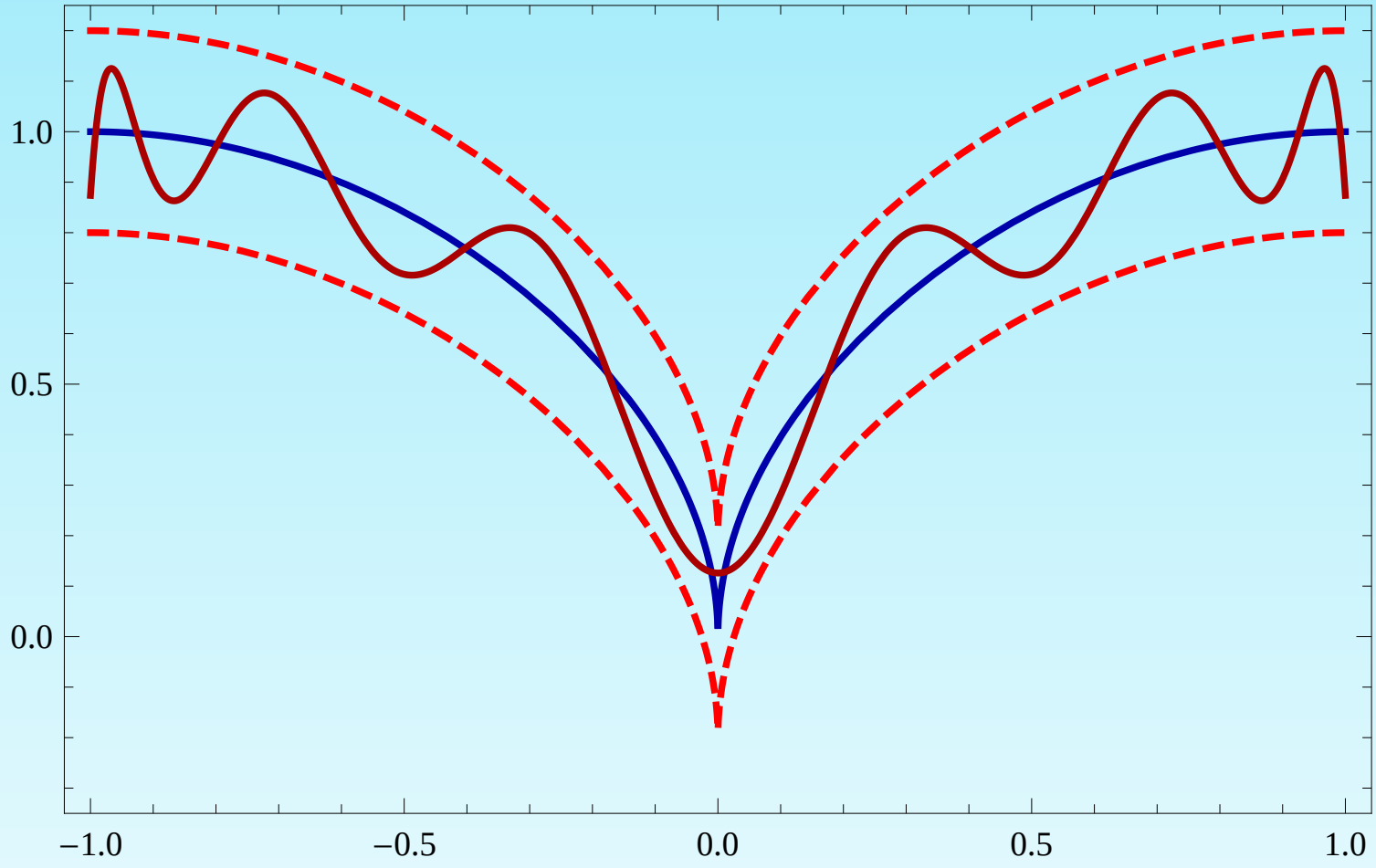
$$f(t)$$



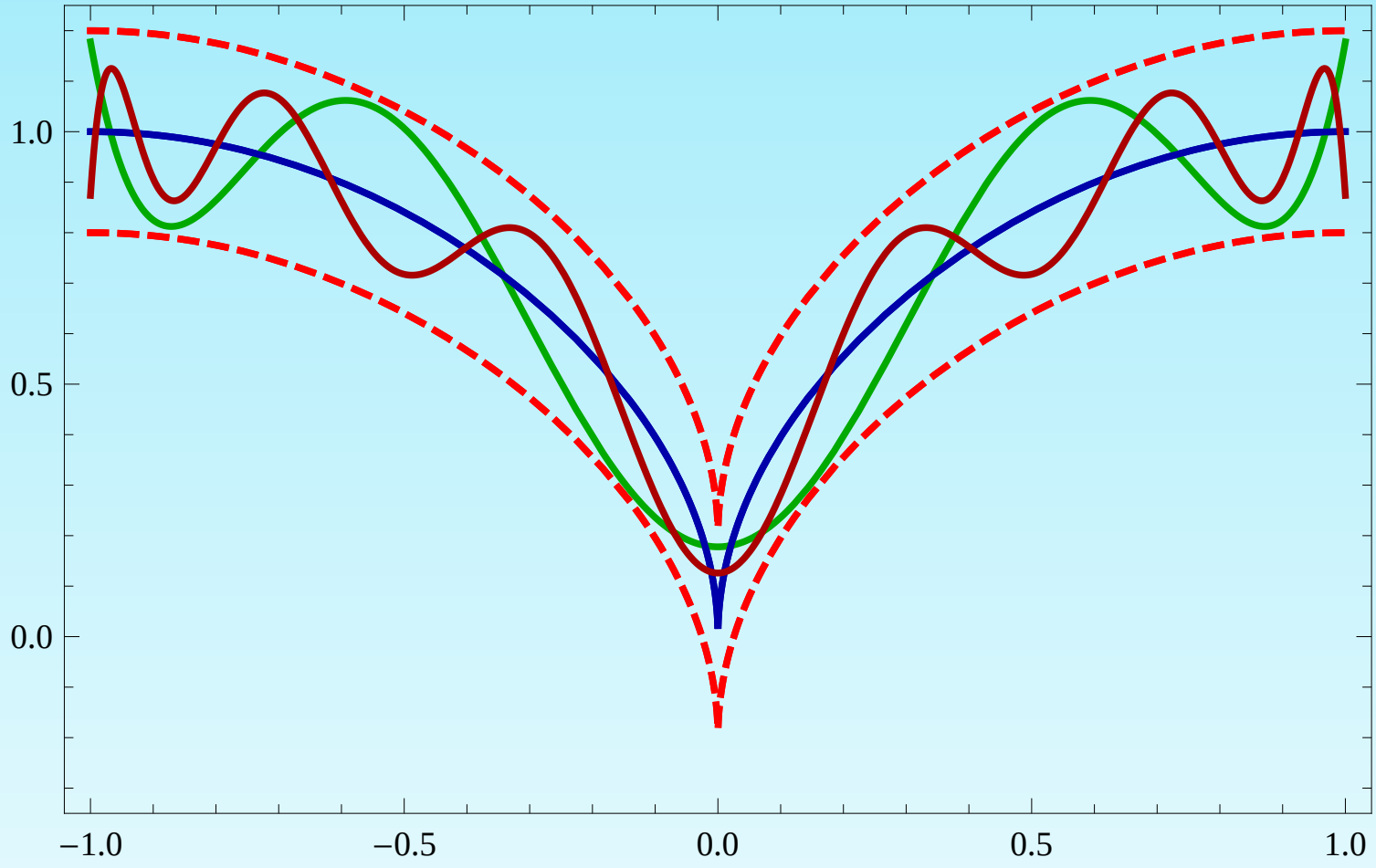
$$f(t),\ f(x)-\varepsilon,\ f(x)+\varepsilon$$



$$f(t),\ f(x)-\varepsilon,\ f(x)+\varepsilon,\ p_1(t)$$



$$f(t),\ f(x)-\varepsilon,\ f(x)+\varepsilon,\ p_2(t)$$



$$f(t),\ f(x)-\varepsilon,\ f(x)+\varepsilon,\ p_1(t),\ p_2(t)$$

- **Weierstrassova teorema** u terminima “**najbolje aproksimacije u uniformnoj normi**”

- **Weierstrassova teorema** u terminima "**najbolje aproksimacije u uniformnoj normi**"

  Neka je

$$E_n(f) = \min_{p \in \mathcal{P}_n} \|f - p\|_{[a,b]}.$$

- **Weierstrassova teorema** u terminima "**najbolje aproksimacije u uniformnoj normi**"

  Neka je

$$E_n(f) = \min_{p \in \mathcal{P}_n} \|f - p\|_{[a,b]}.$$

  Tada je

$$\lim_{n \to \infty} E_n(f) = 0, \qquad f \in C[a,b].$$

- **Weierstrassova teorema** u terminima "**najbolje aproksimacije u uniformnoj normi**"

  Neka je

$$E_n(f) = \min_{p \in \mathcal{P}_n} \|f - p\|_{[a,b]}.$$

  Tada je

$$\lim_{n \to \infty} E_n(f) = 0, \qquad f \in C[a,b].$$

- Skup polinoma je **svuda gust** u $C[a,b]$.

Interpolacija?

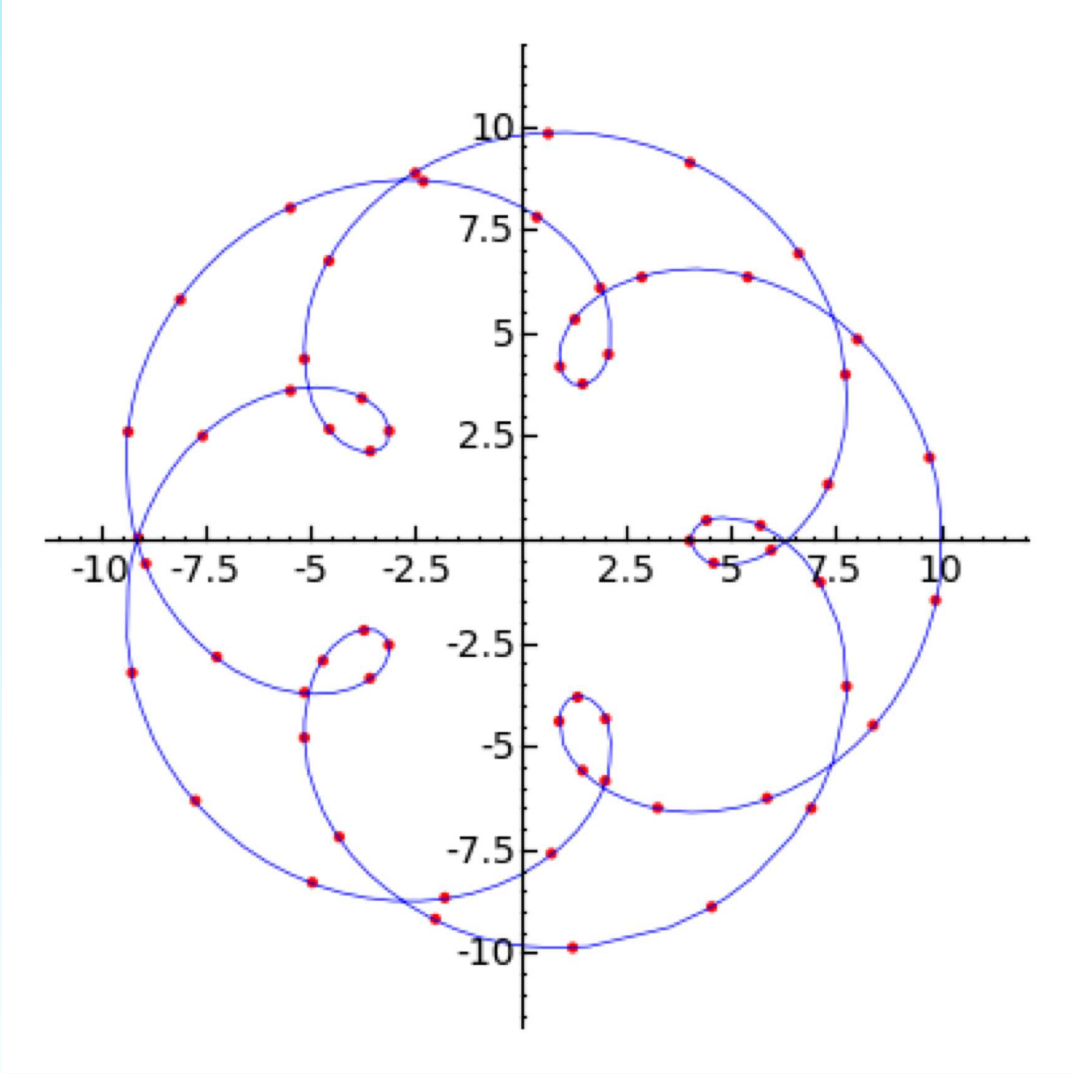
– Konstrukcija novih podataka u opsegu datih podataka

Interpolacija?

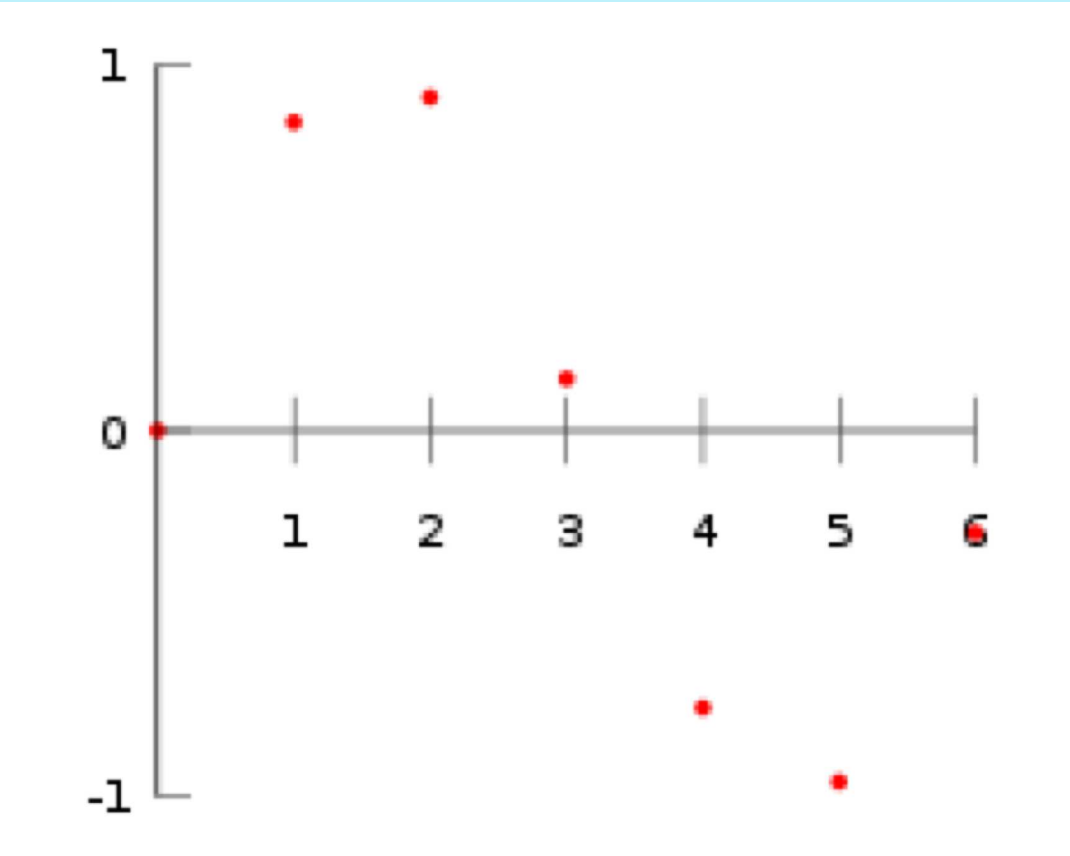
- Konstrukcija novih podataka u opsegu datih podataka
- čitanje između redova

Interpolacija?

- Konstrukcija novih podataka u opsegu datih podataka
- čitanje između redova
- Analitički izraz – konstruktivni elementi


10
7.5
5
2.5
-10
-7.5
-5
-2.5
2.5
5
7.5
10
-2.5
-5
-7.5
-10

Podaci

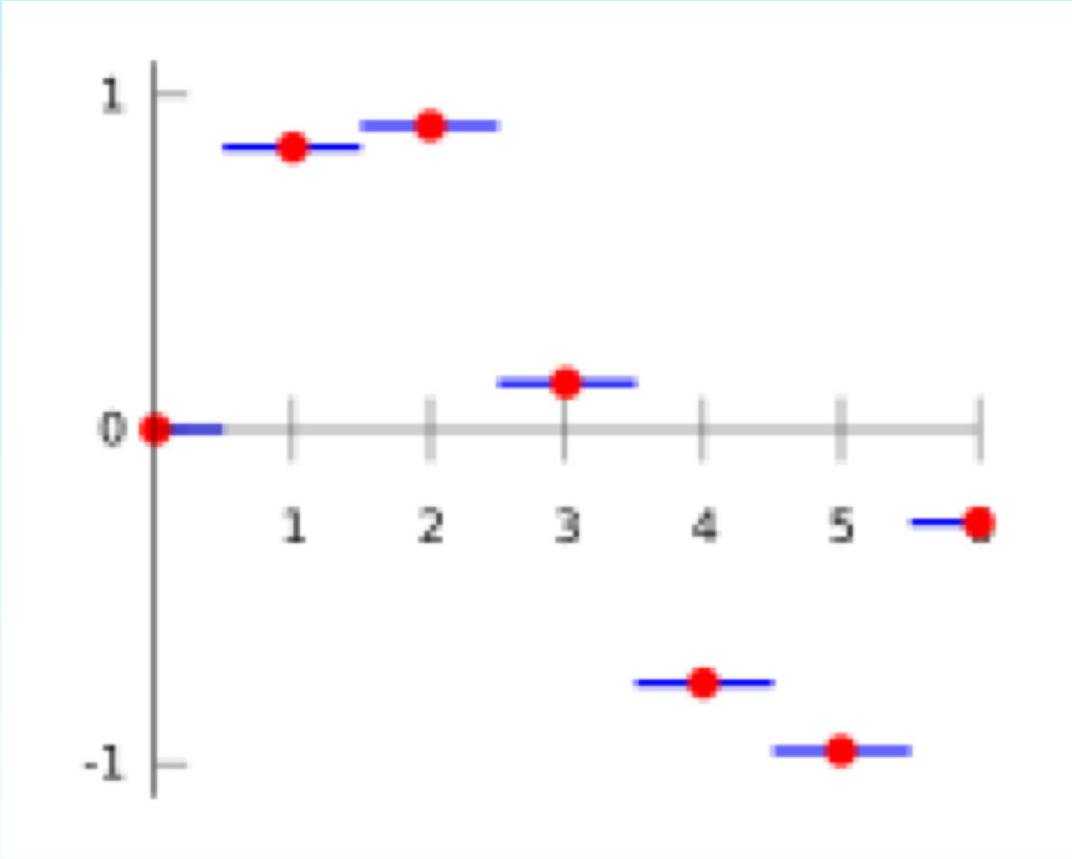


Deo-po-deo konstanta

(Splajn nultog stepena)

Deo-po-deo konstanta

(Splajn nultog stepena)

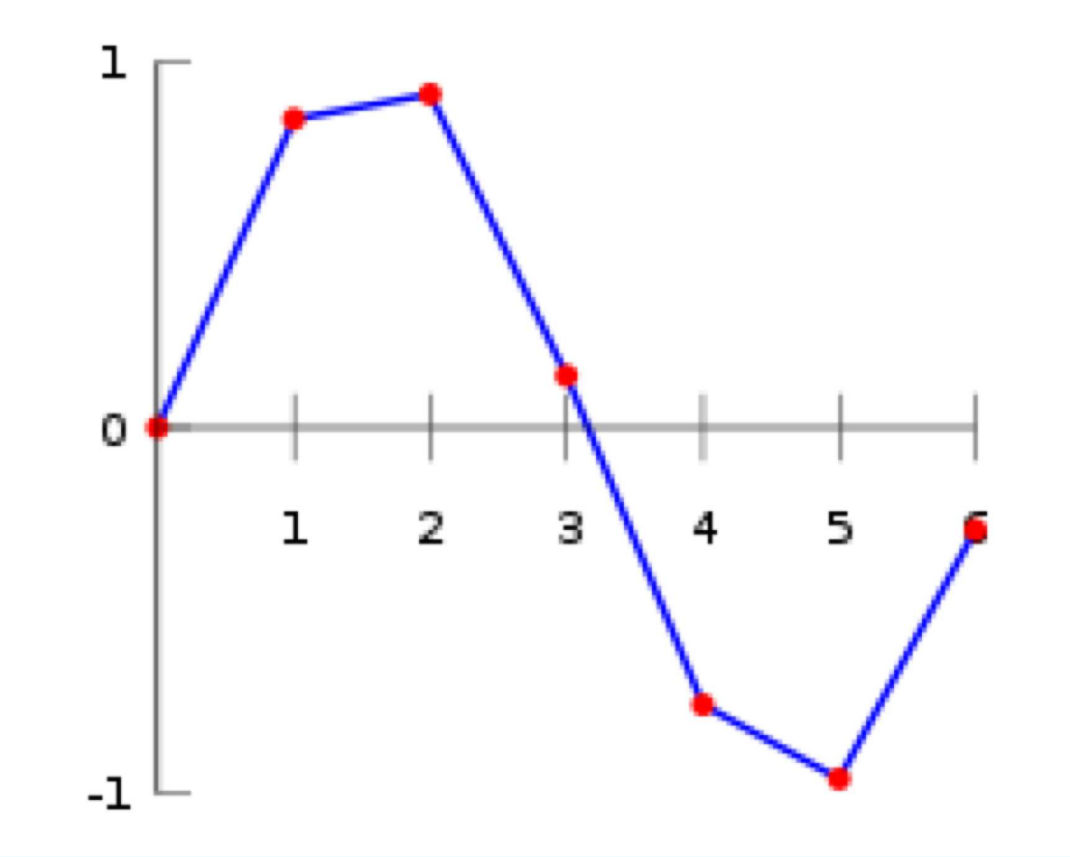


Linearna interpolacija

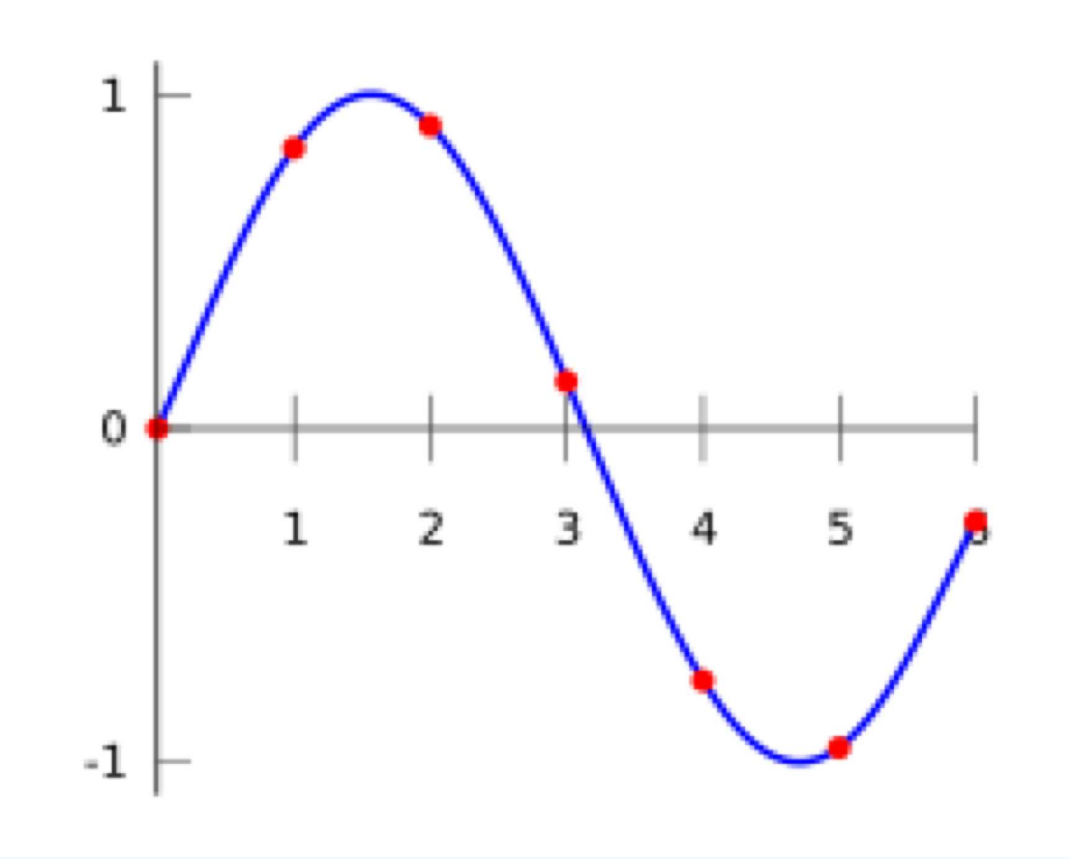
(Splajn prvog stepena)

Linearna interpolacija

(Splajn prvog stepena)



Polinomska interpolacija



Interpolacija (Rungeov primer)

$$f(x) = \frac{1}{1 + (x/a)^2}, \quad x \in [-1, 1], \;\; a = 2/11$$

Interpolacija (Rungeov primer)

$$f(x) = \frac{1}{1 + (x/a)^2}, \quad x \in [-1, 1], \quad a = 2/11$$

- **Interpolacioni čvorovi:** x_k, $k = 1, 2, \ldots, n$

Interpolacija (Rungeov primer)

$$f(x) = \frac{1}{1 + (x/a)^2}, \quad x \in [-1, 1], \quad a = 2/11$$

- **Interpolacioni čvorovi:** x_k, $k = 1, 2, \ldots, n$
- **Ekvidistantni čvorovi:** $x_k = -1 + \dfrac{2(k-1)}{n-1}$

Interpolacija (Rungeov primer)

$$f(x) = \frac{1}{1 + (x/a)^2}, \quad x \in [-1, 1], \quad a = 2/11$$

- **Interpolacioni čvorovi:** x_k, $k = 1, 2, \ldots, n$
- **Ekvidistantni čvorovi:** $x_k = -1 + \dfrac{2(k-1)}{n-1}$
- **Čebiševljevi čvorovi:** $x_k = -\cos\dfrac{(2k-1)\pi}{2n}$

Interpolacija (Rungeov primer)

$$f(x) = \frac{1}{1 + (x/a)^2}, \quad x \in [-1, 1], \quad a = 2/11$$

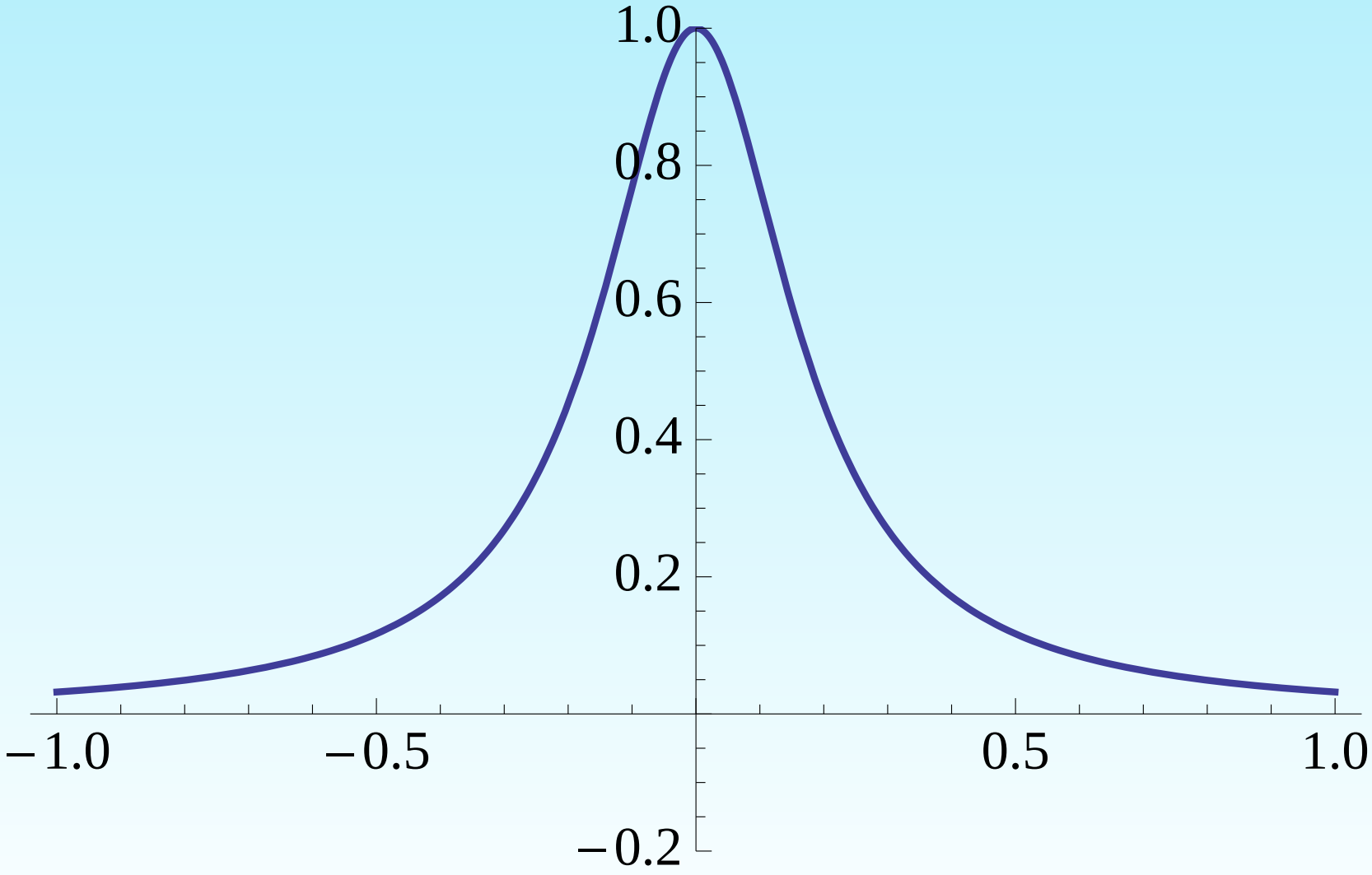
- **Interpolacioni čvorovi:** x_k, $k = 1, 2, \ldots, n$
- **Ekvidistantni čvorovi:** $x_k = -1 + \dfrac{2(k-1)}{n-1}$
- **Čebiševljevi čvorovi:** $x_k = -\cos\dfrac{(2k-1)\pi}{2n}$

Nule Čebiševljevih polinoma

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad -1 \le x \le 1$$

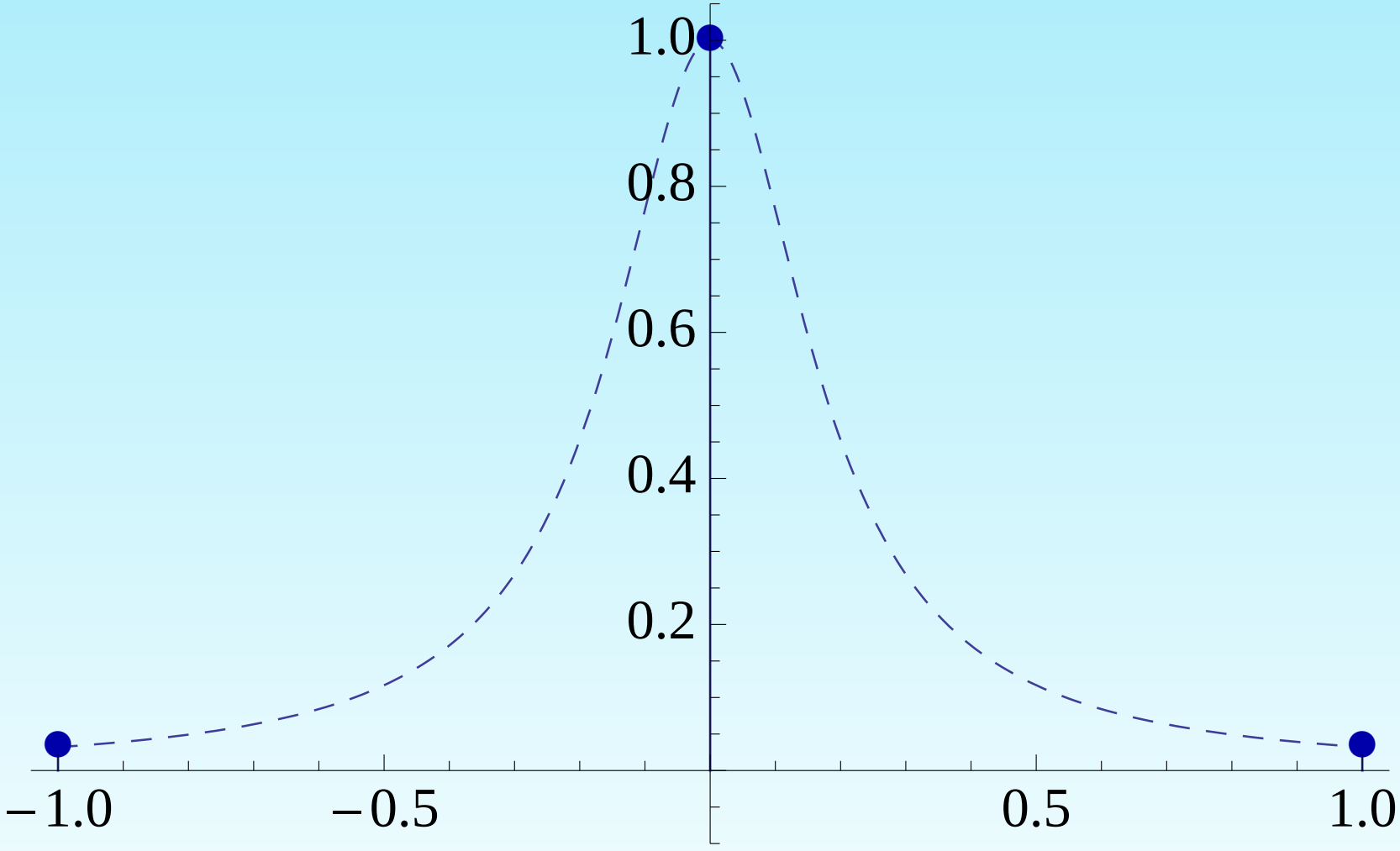
Interpolacija (Runge-ov primer)

$y = f(x)$



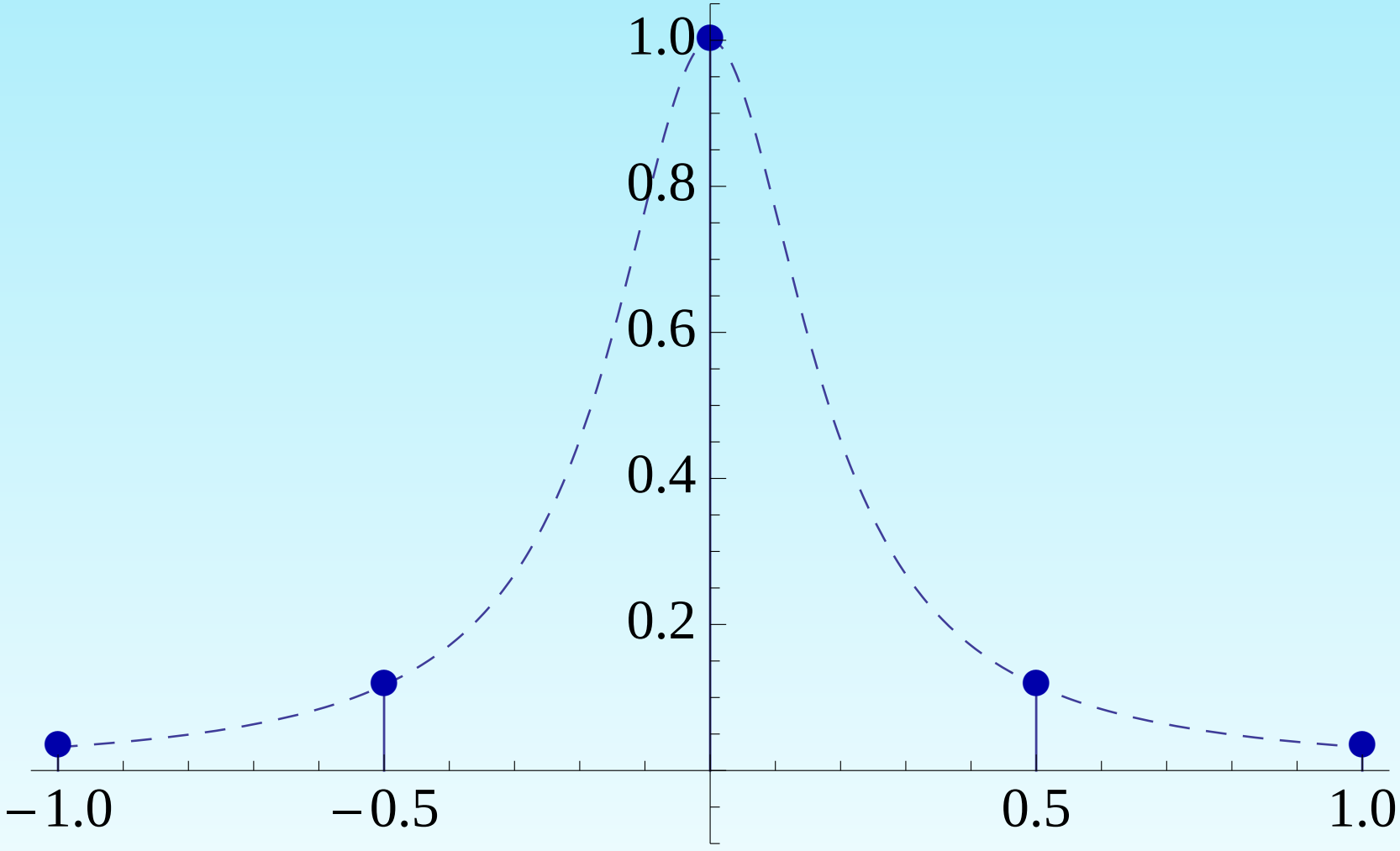
- $n = 3$

$$x_k = -1 + \frac{2(k-1)}{n-1}$$



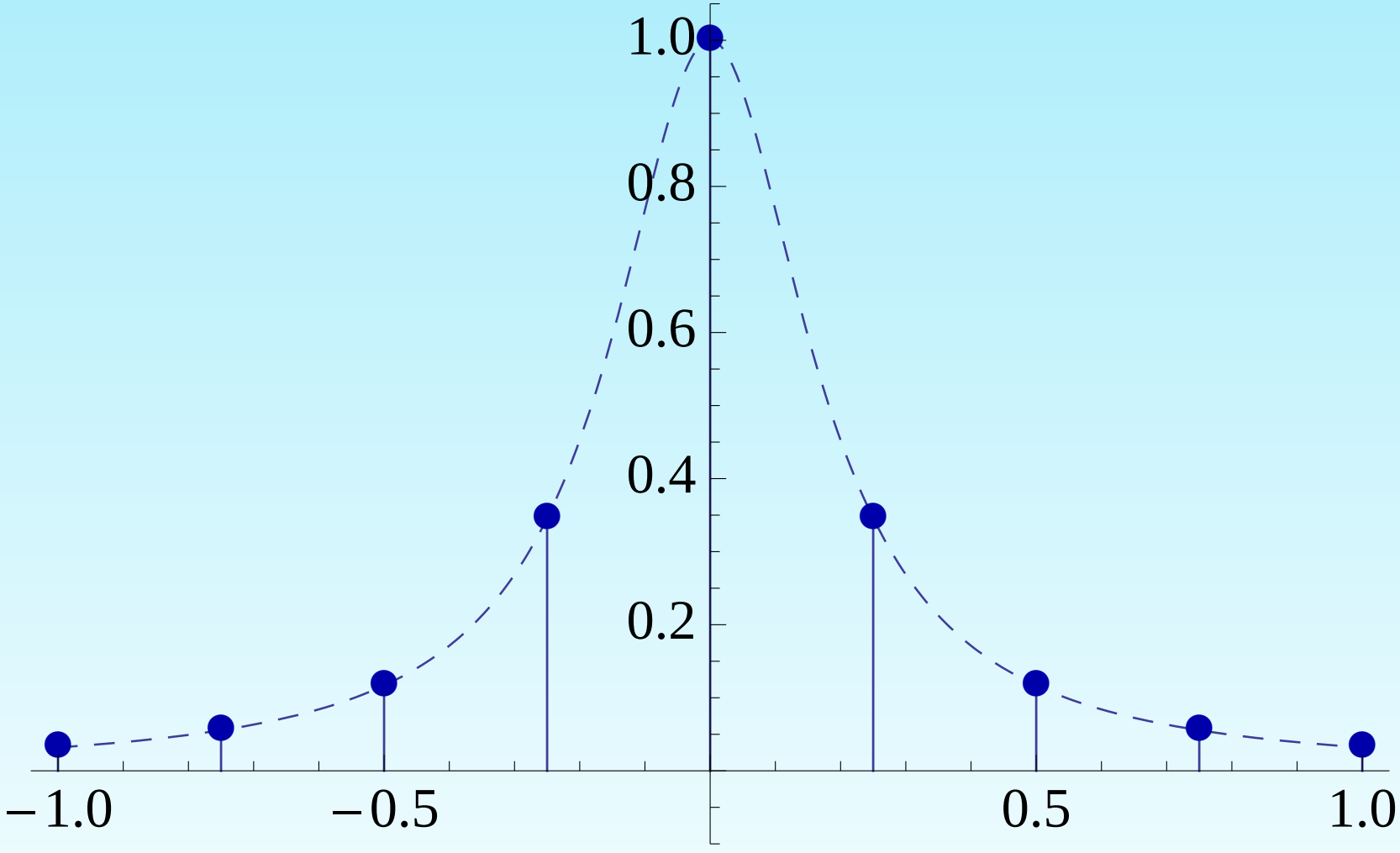
- $n = 5$

$$x_k = -1 + \frac{2(k-1)}{n-1}$$



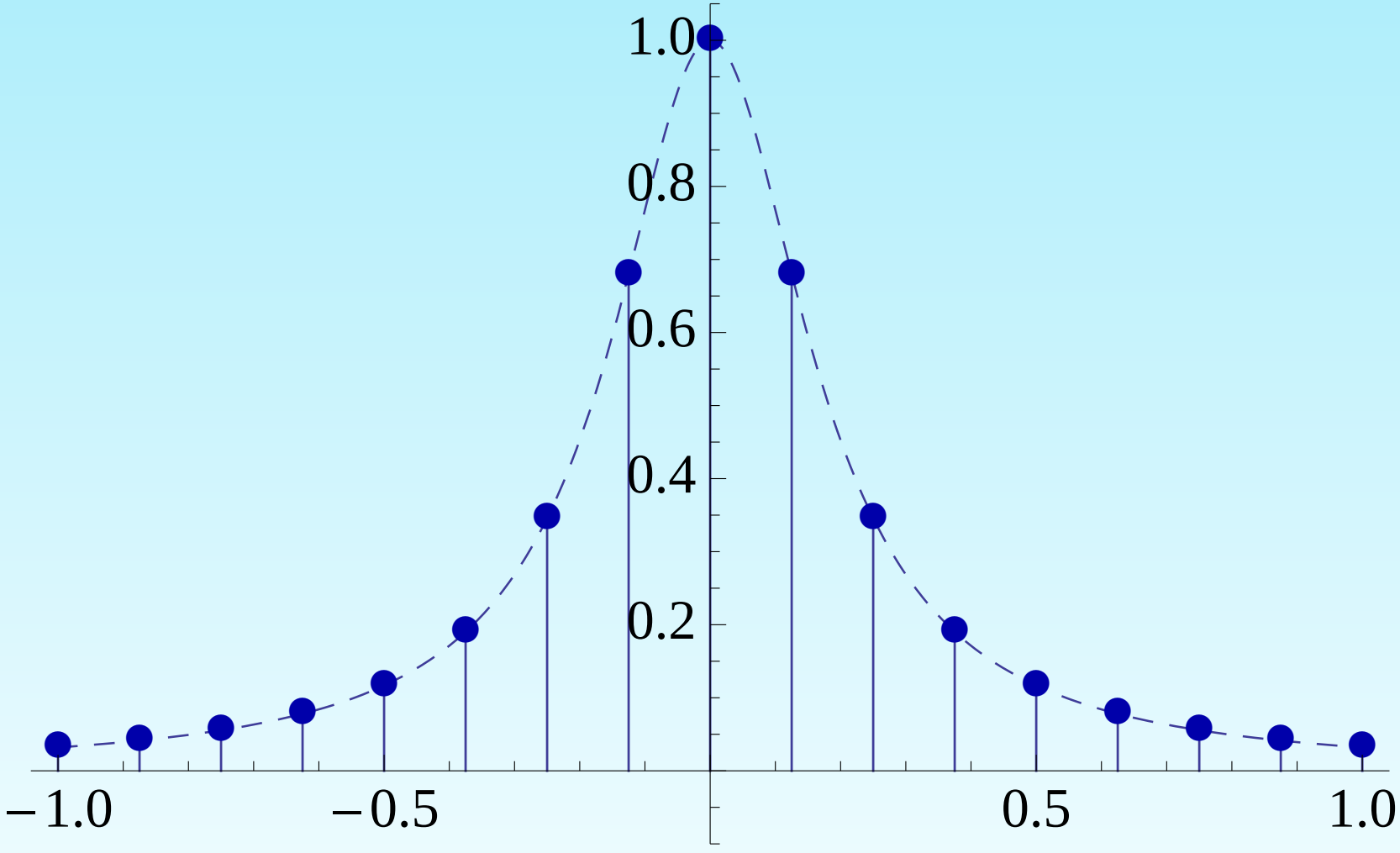
- $n = 9$

$$x_k = -1 + \frac{2(k-1)}{n-1}$$



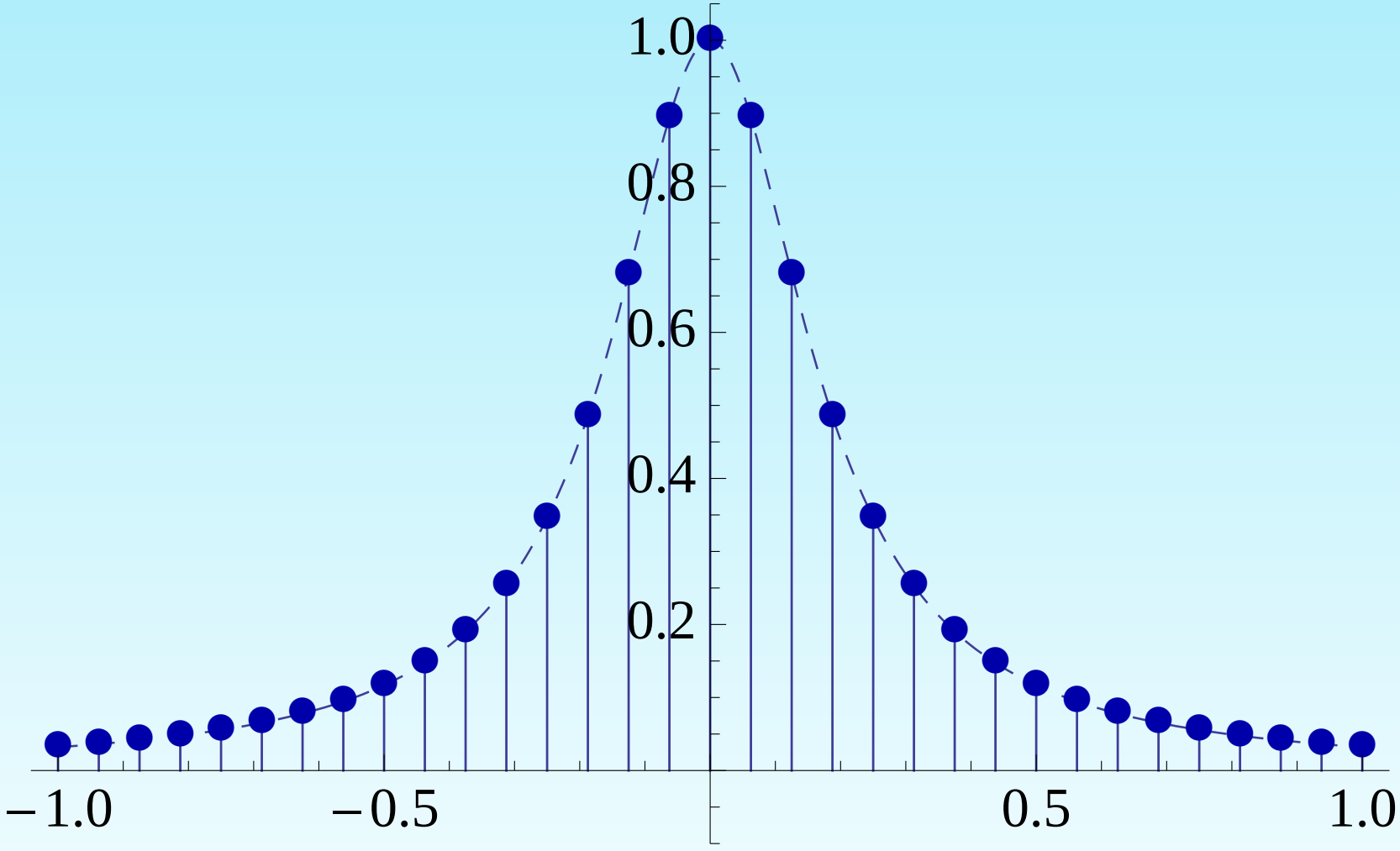
- $n = 17$

$$x_k = -1 + \frac{2(k-1)}{n-1}$$



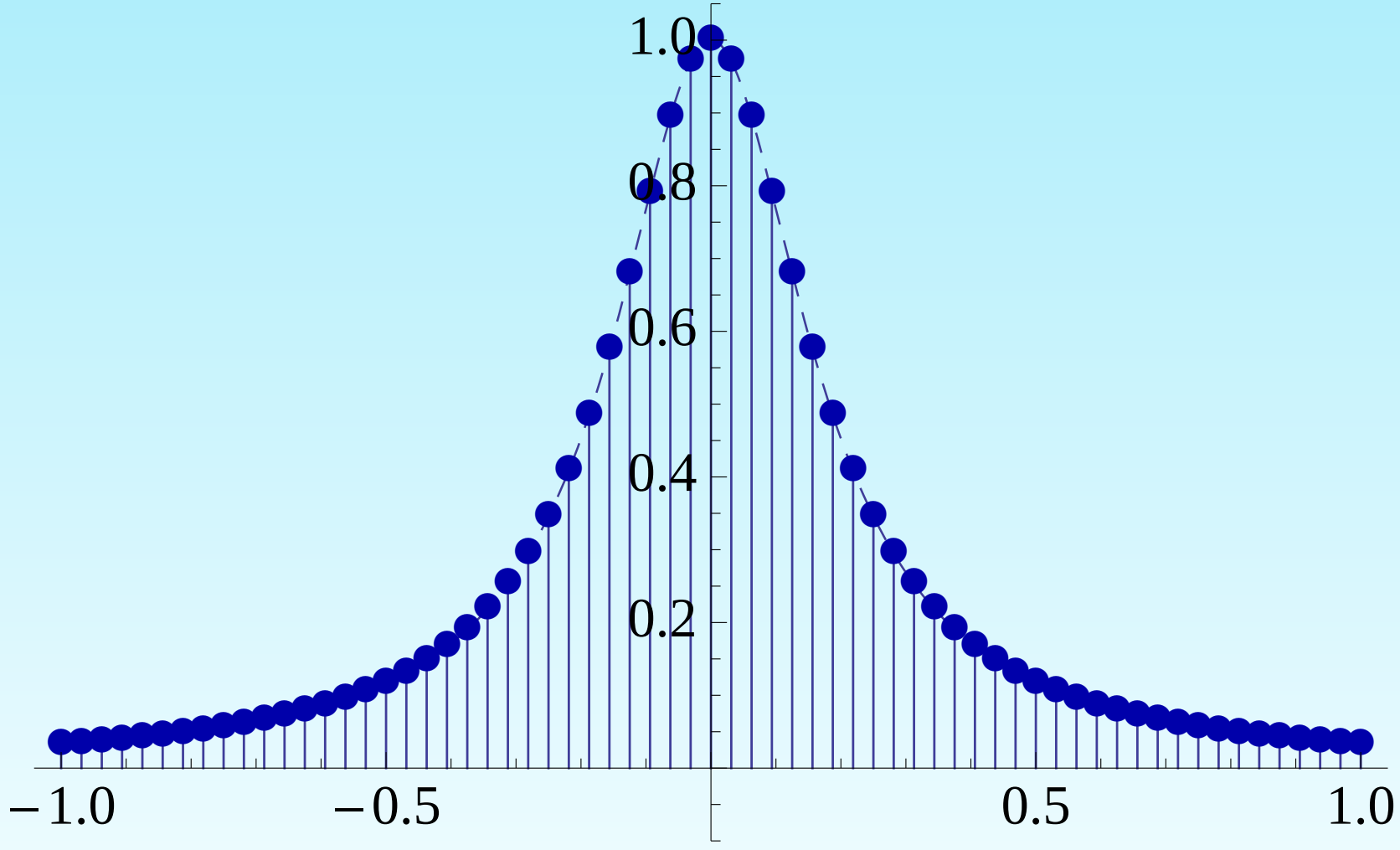
- $n = 33$

$$x_k = -1 + \frac{2(k-1)}{n-1}$$



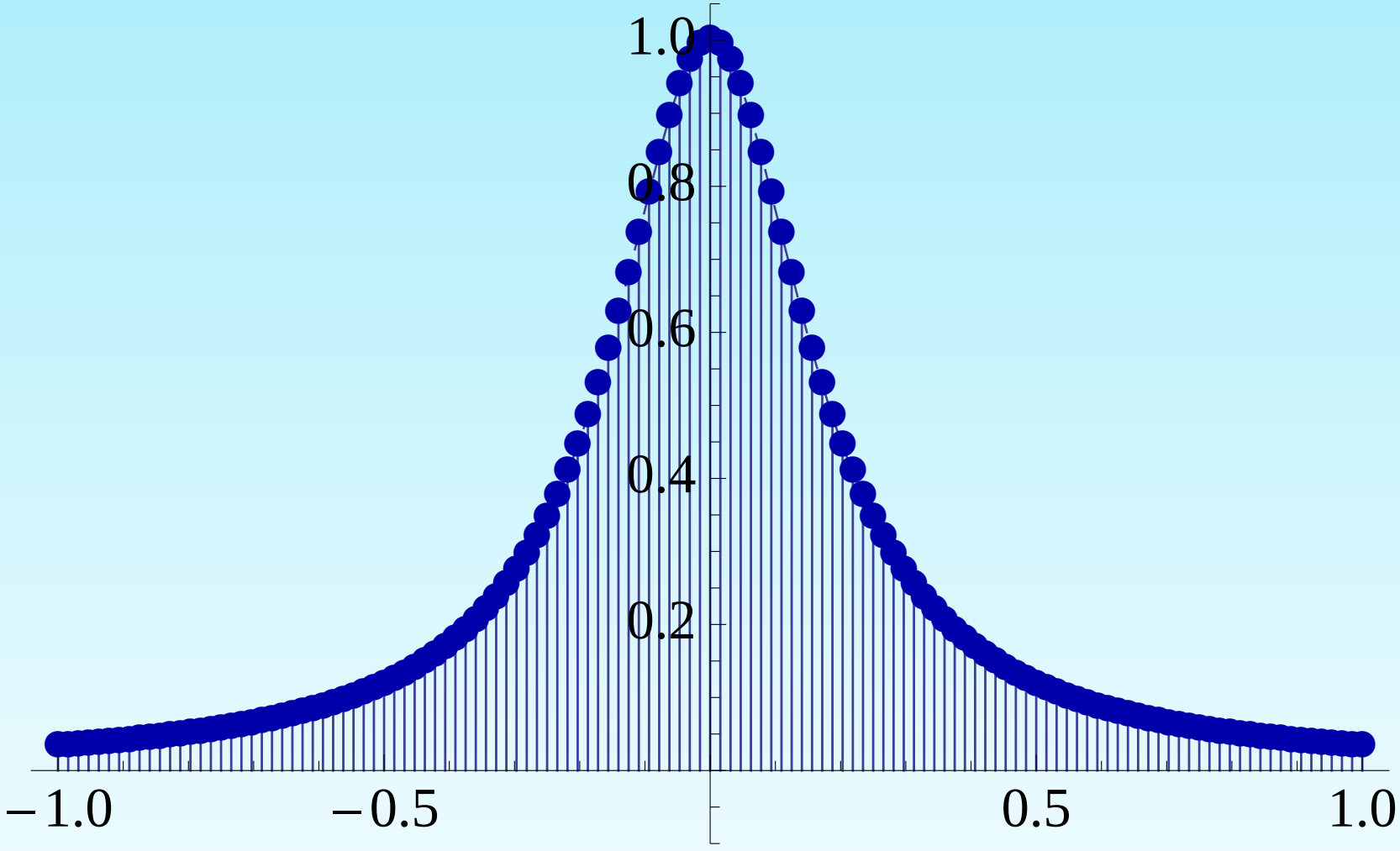
- $n = 65$

$$x_k = -1 + \frac{2(k-1)}{n-1}$$

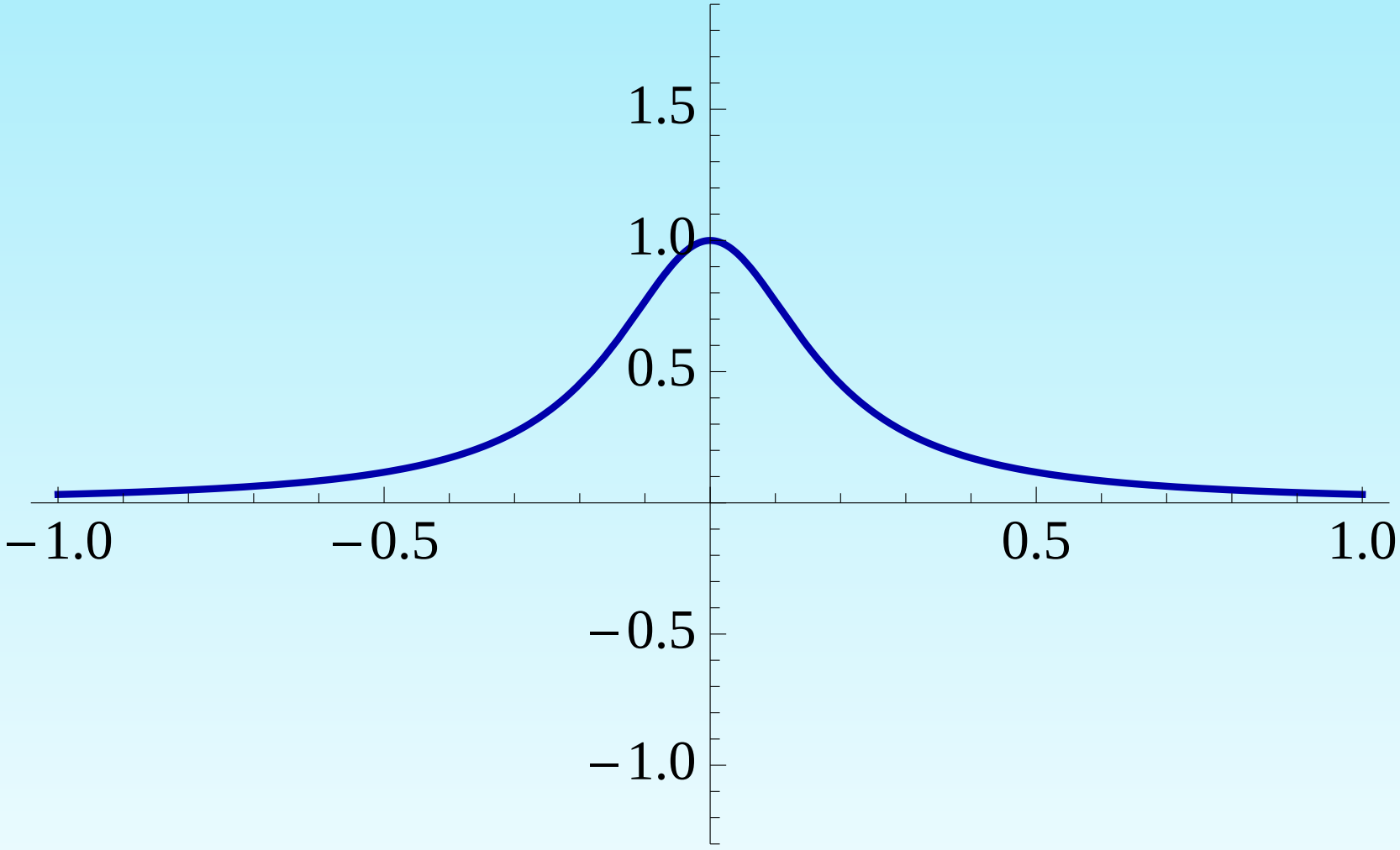


- $n = 129$

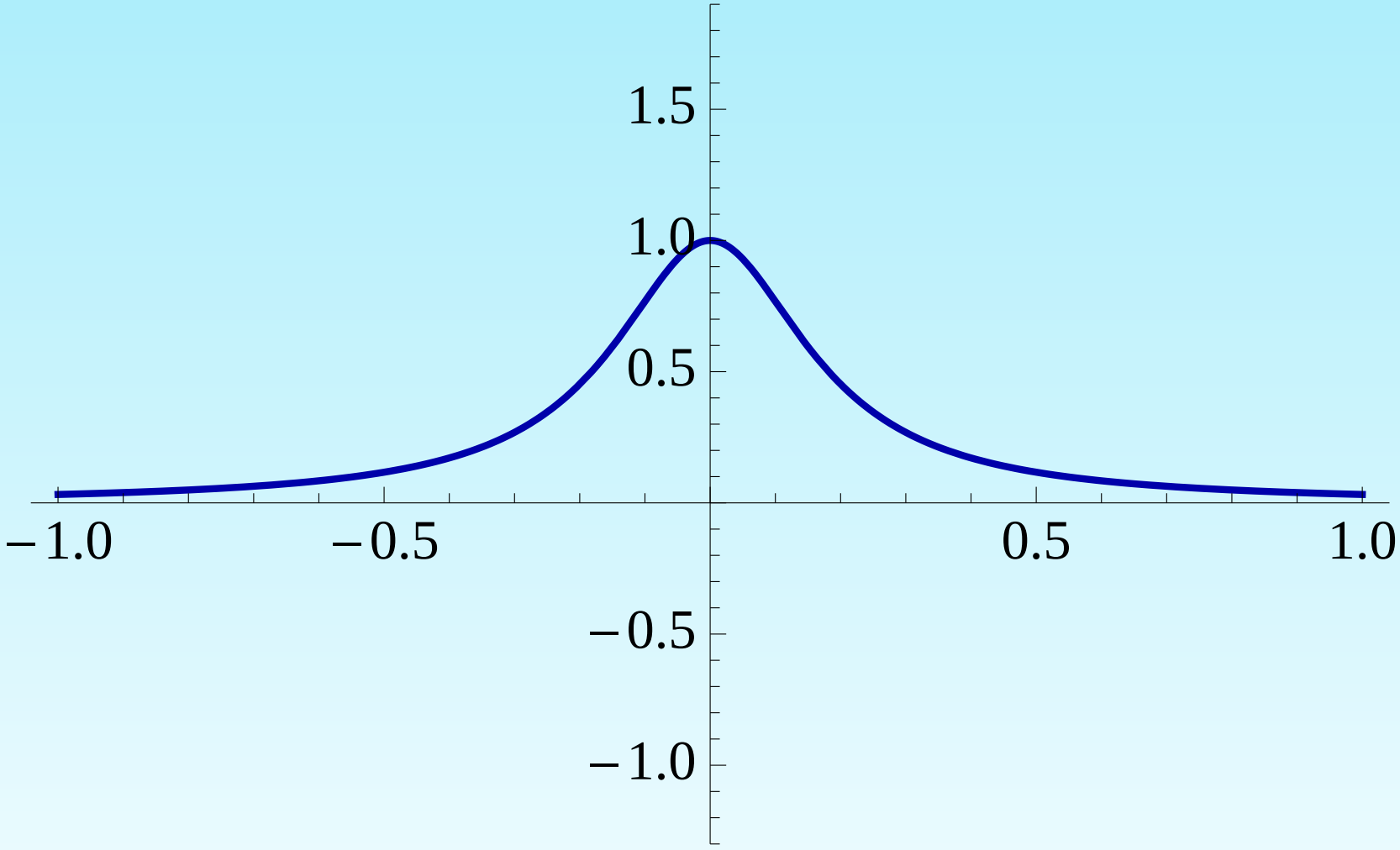
$$x_k = -1 + \frac{2(k-1)}{n-1}$$



- $y = f(x)$

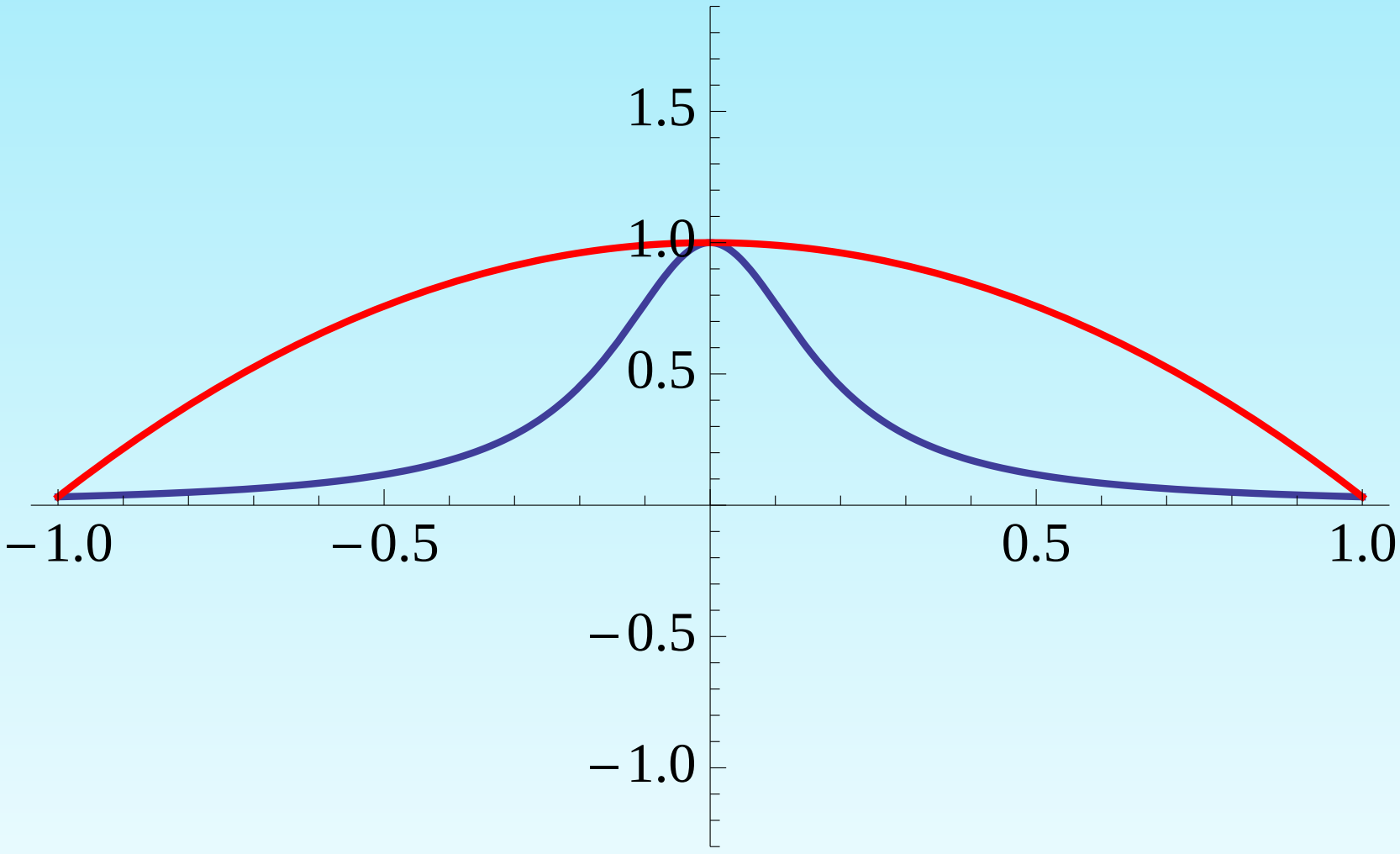


- $y = f(x)$

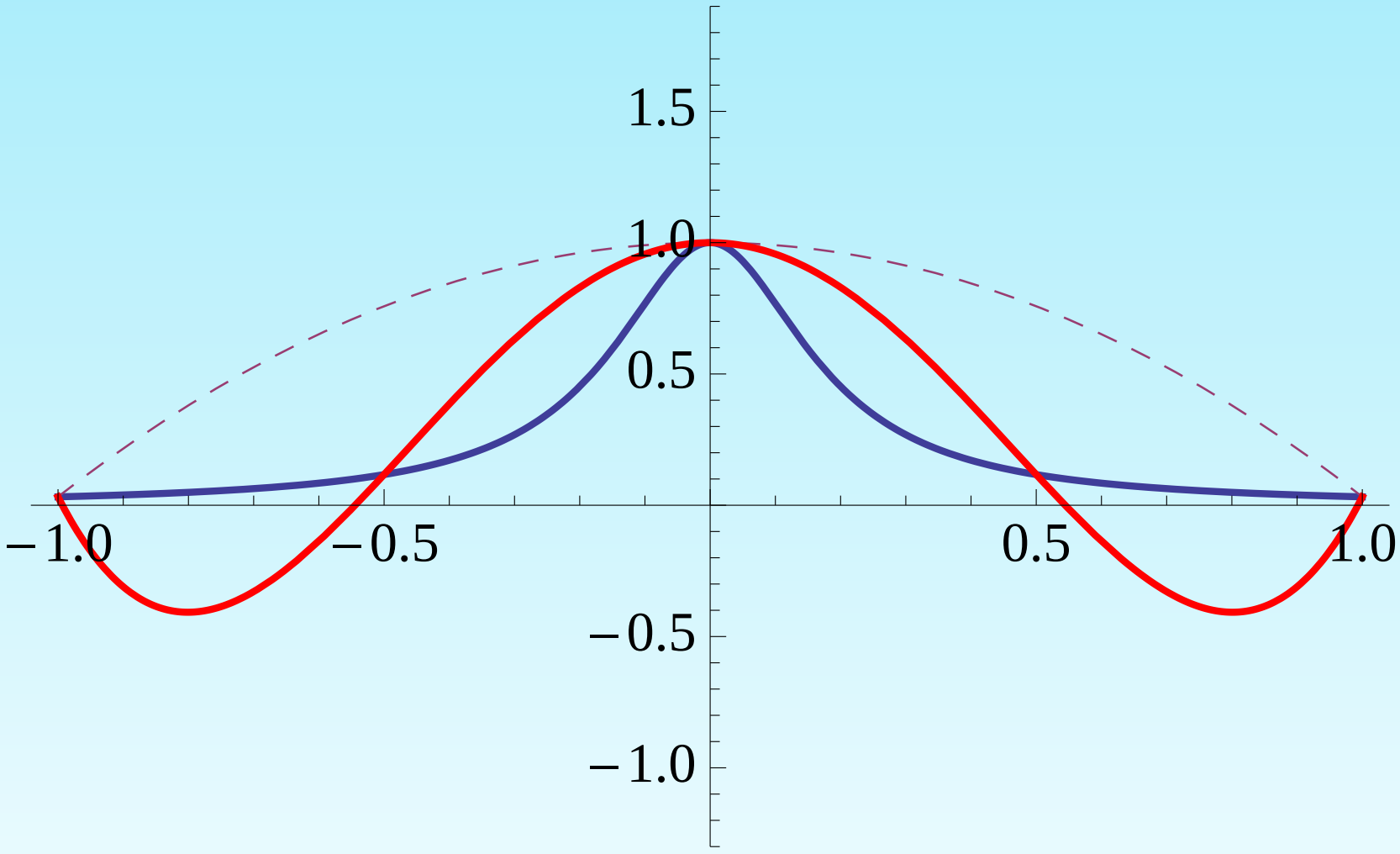


- **Interpolacioni polinom za** $n = 3, 5, 9, 17$

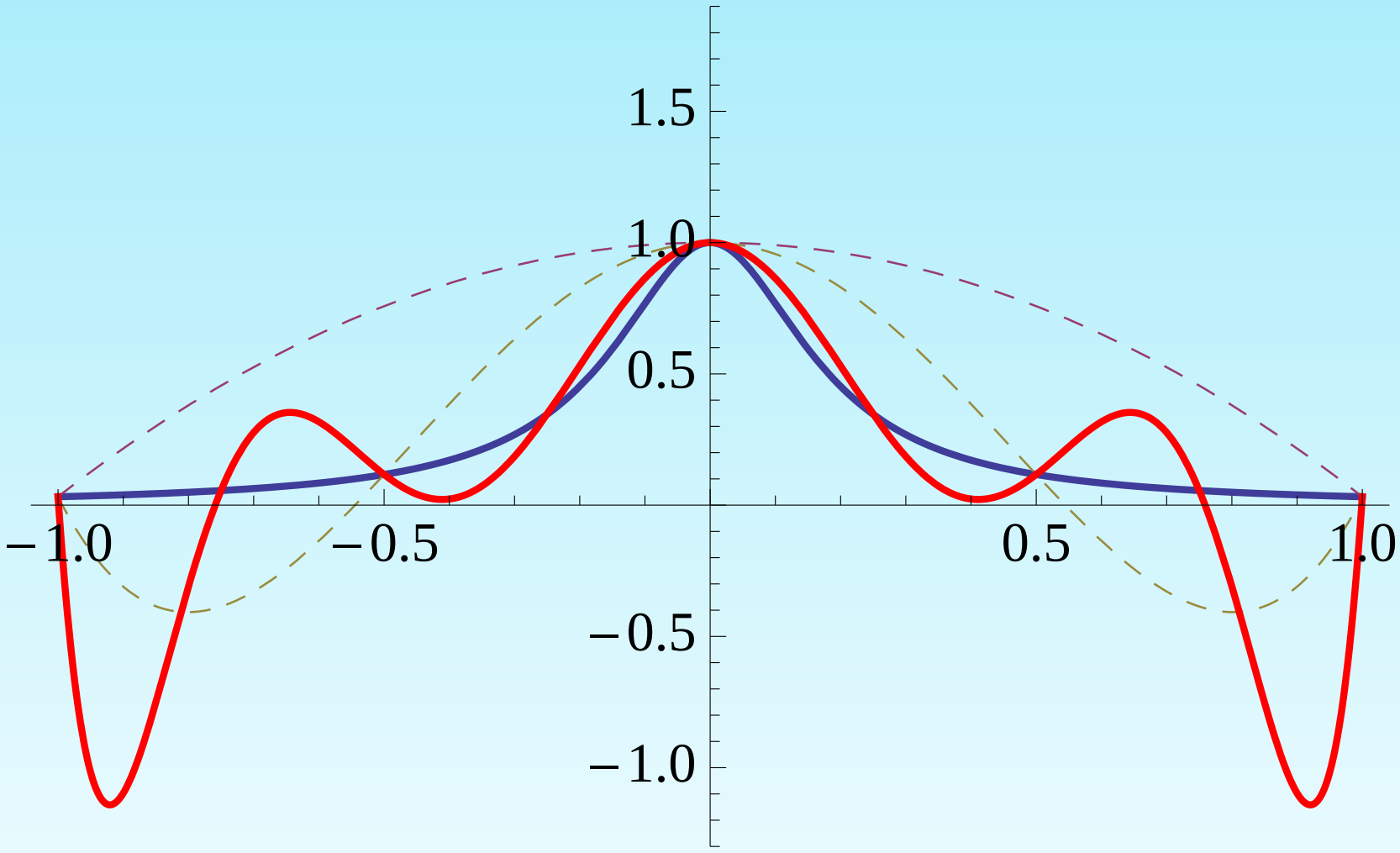
- $n = 3$



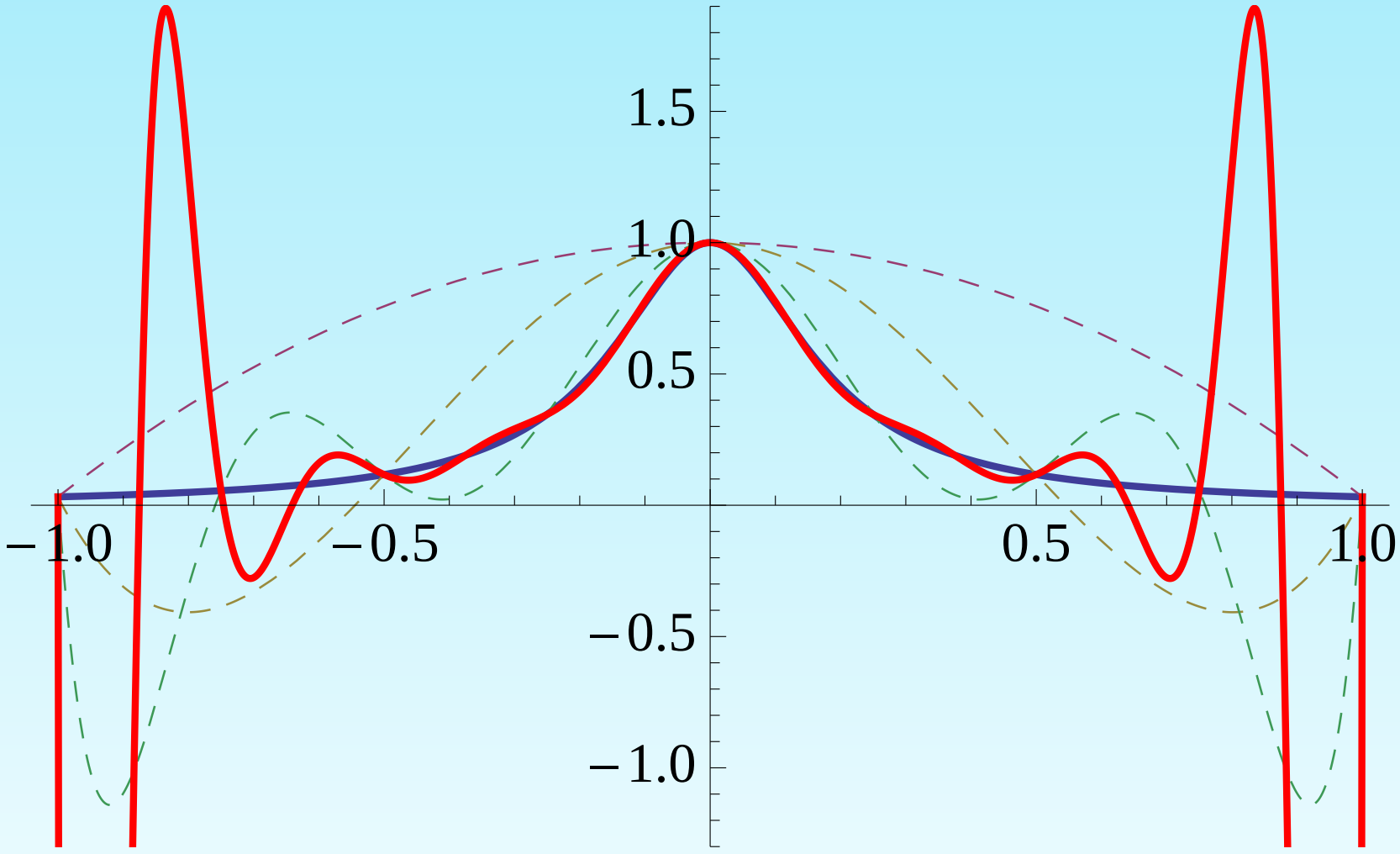
- $n = 5$



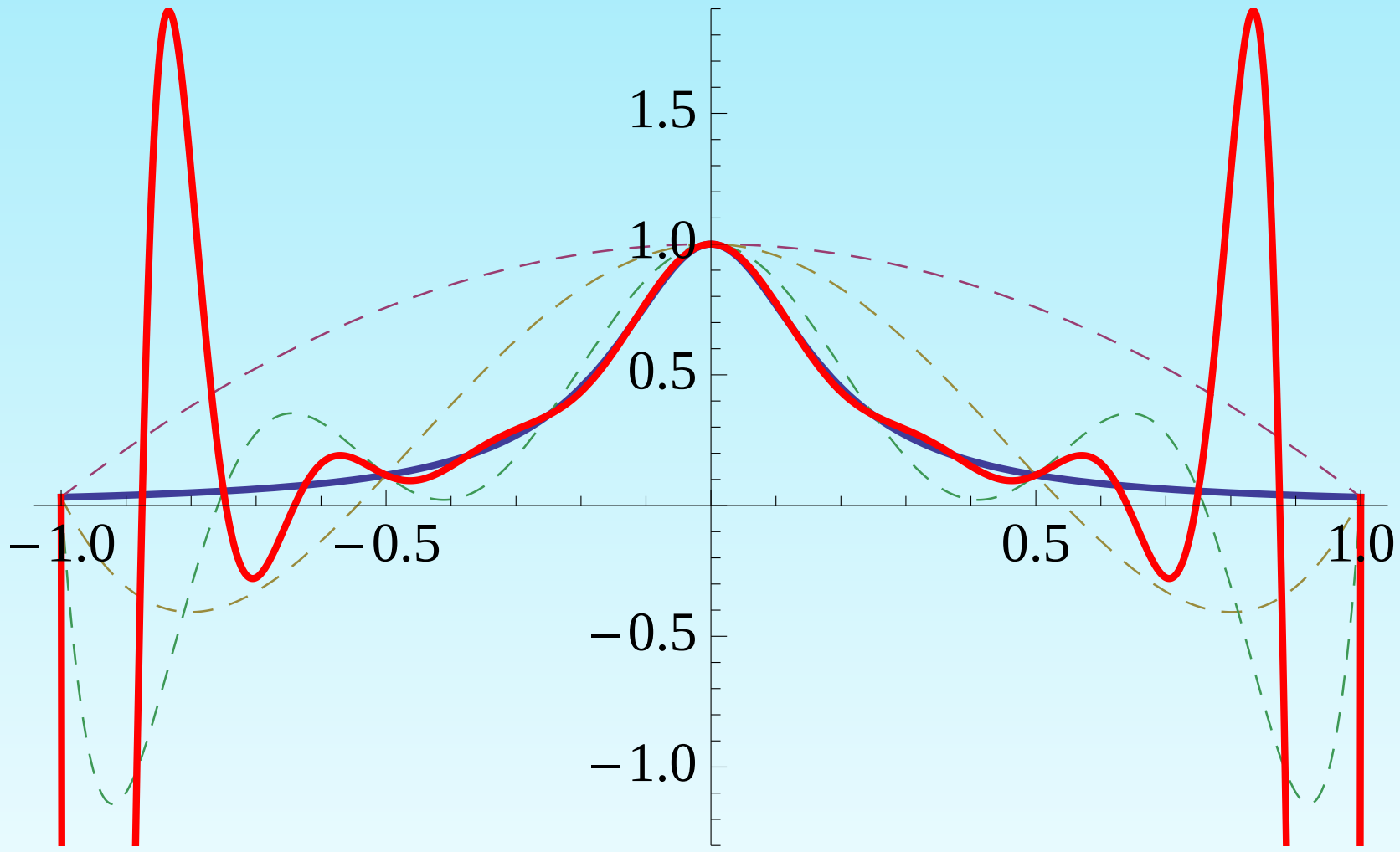
- $n = 9$



- $n = 17$

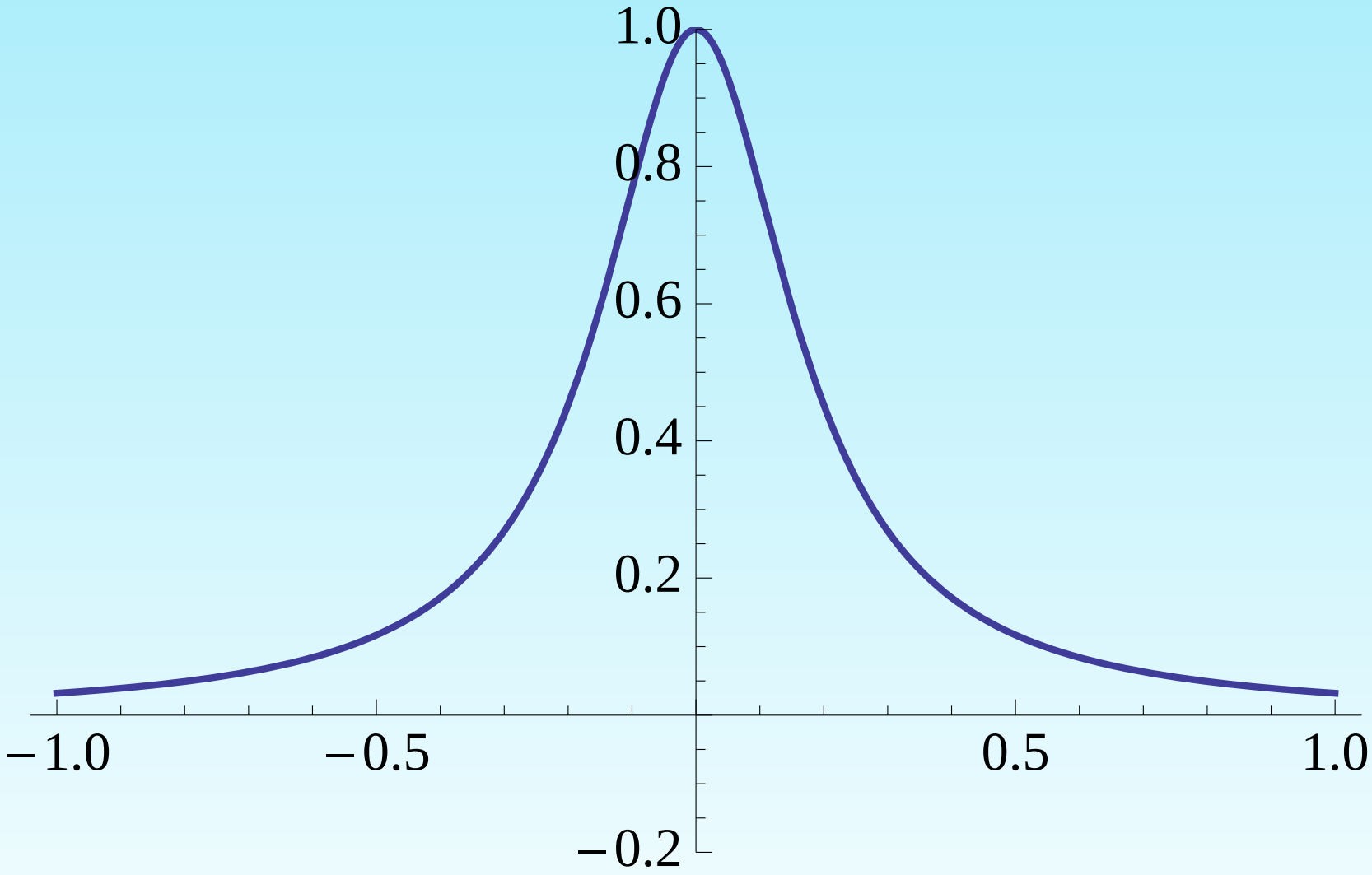


- $n = 17$



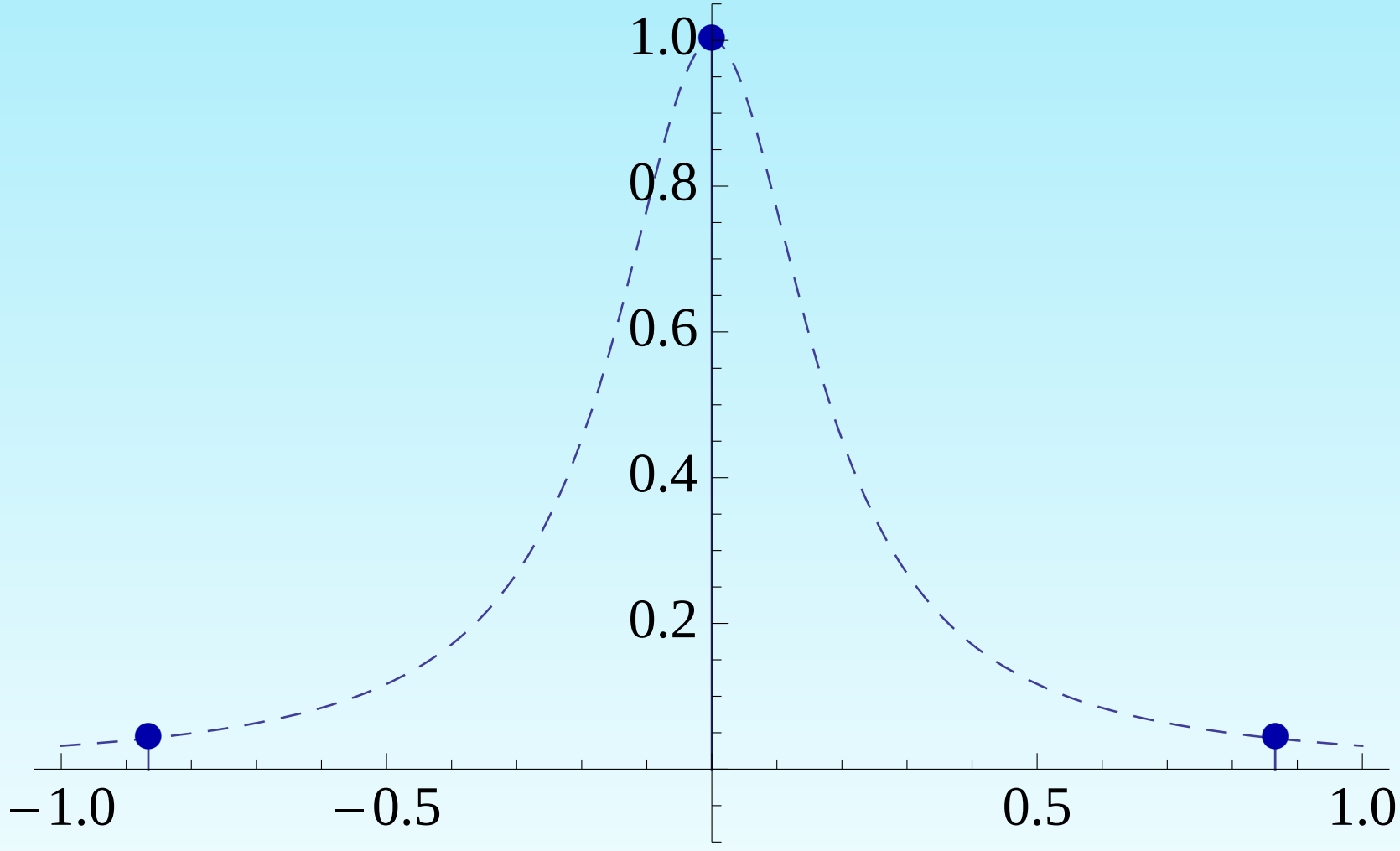
divergencija **konvergencija** **divergencija**

- $y = f(x)$



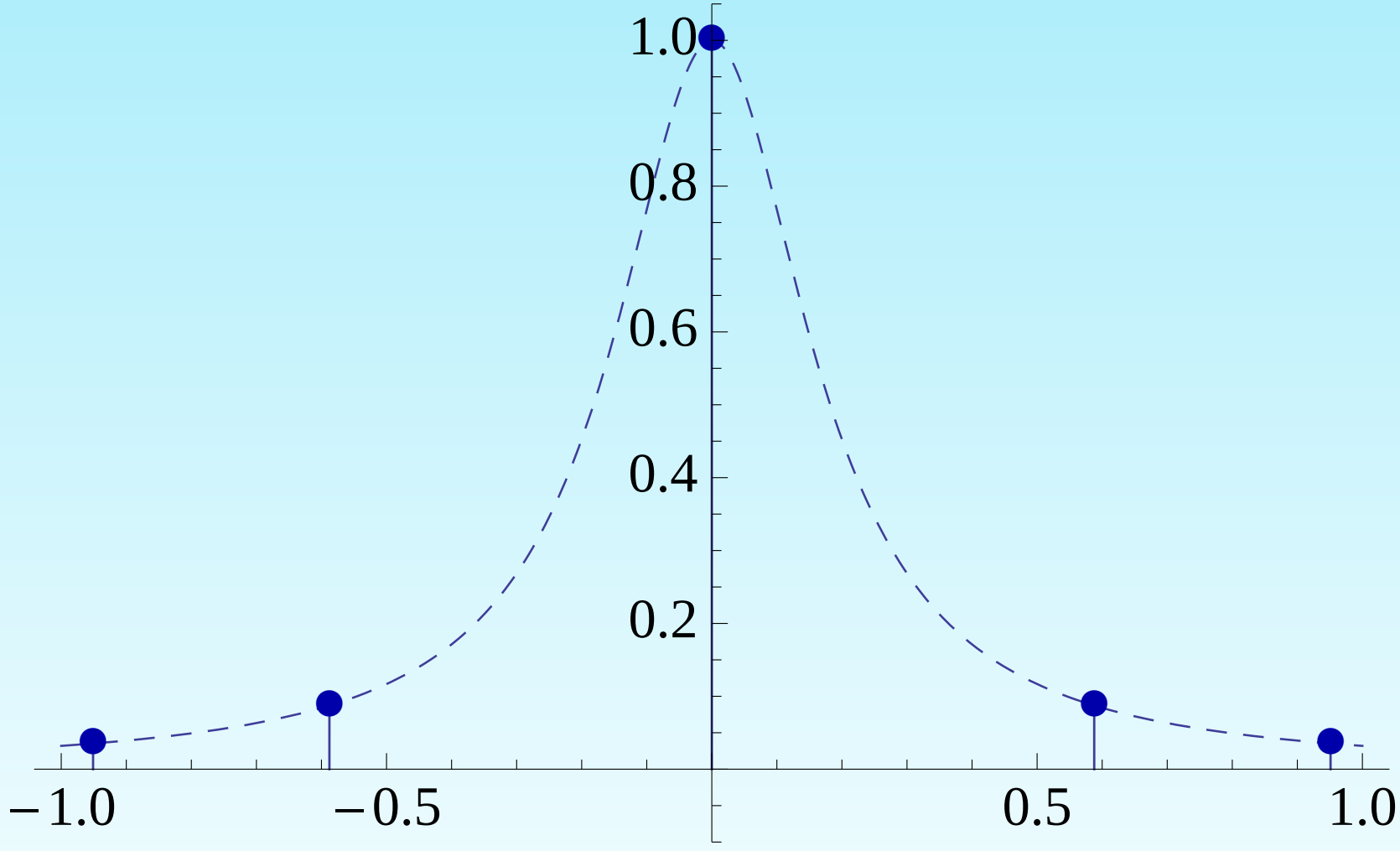
- $n = 3$

$$x_k = -\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}$$



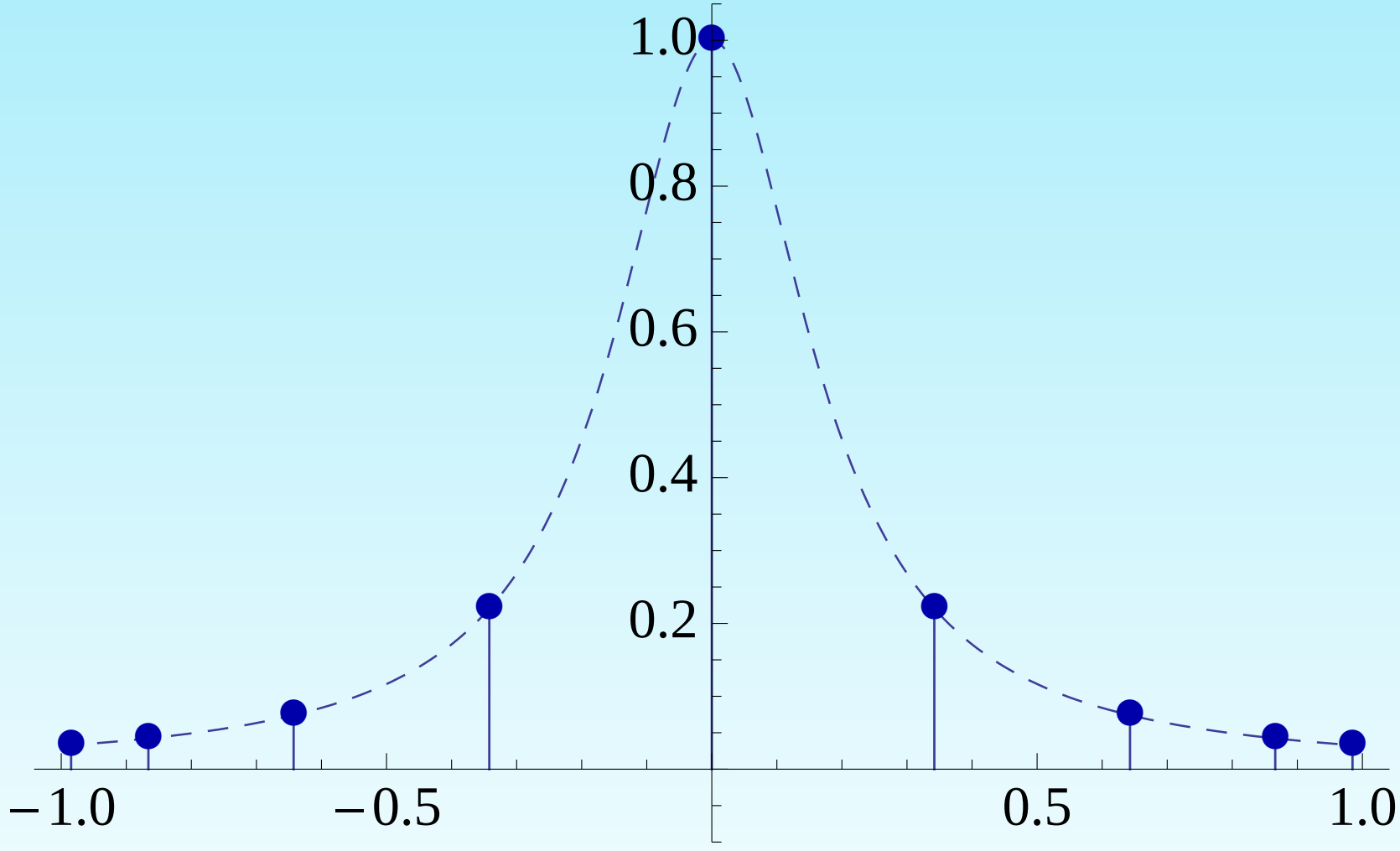
- $n = 5$

$$x_k = -\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}$$



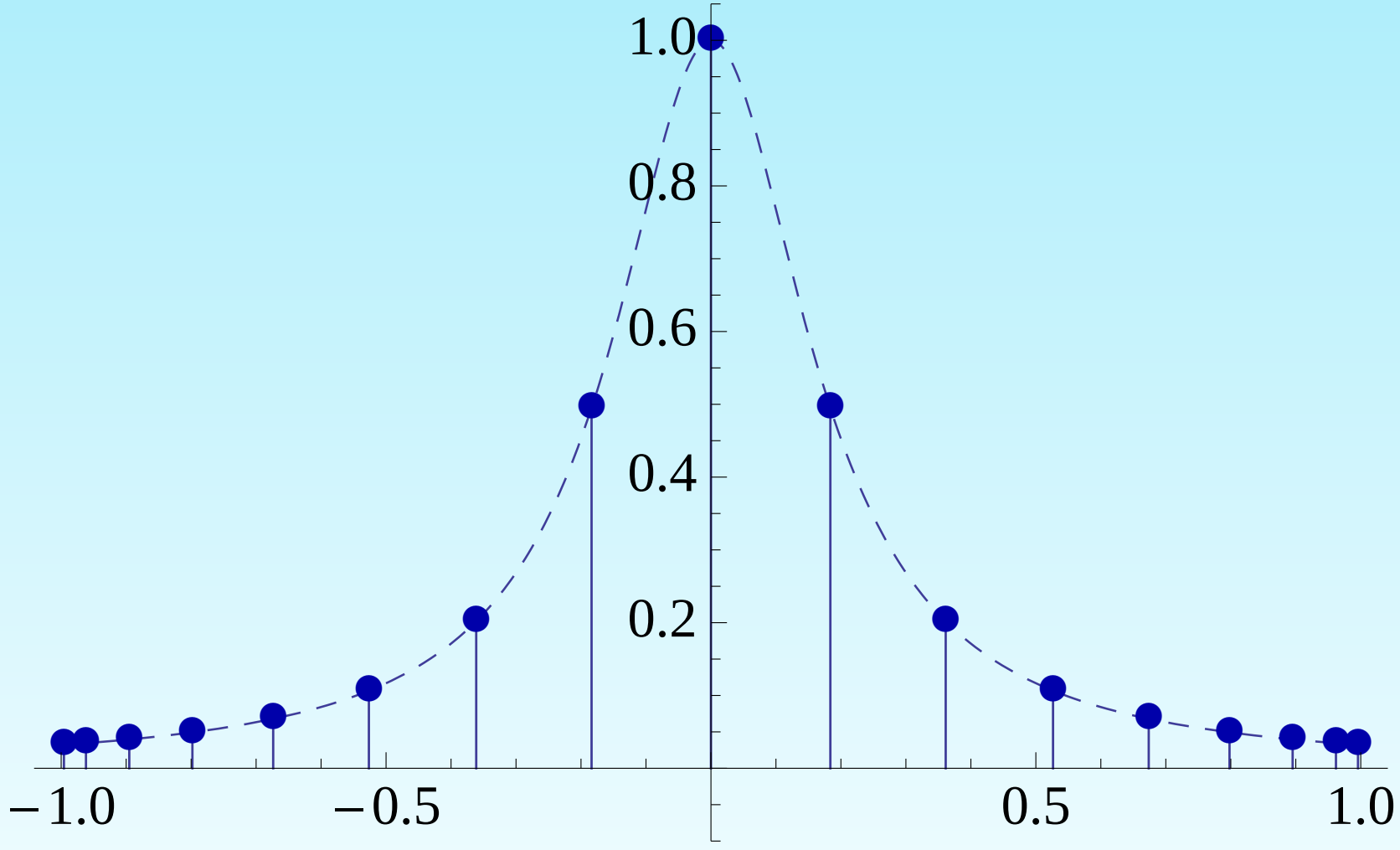
- $n = 9$

$$x_k = -\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}$$



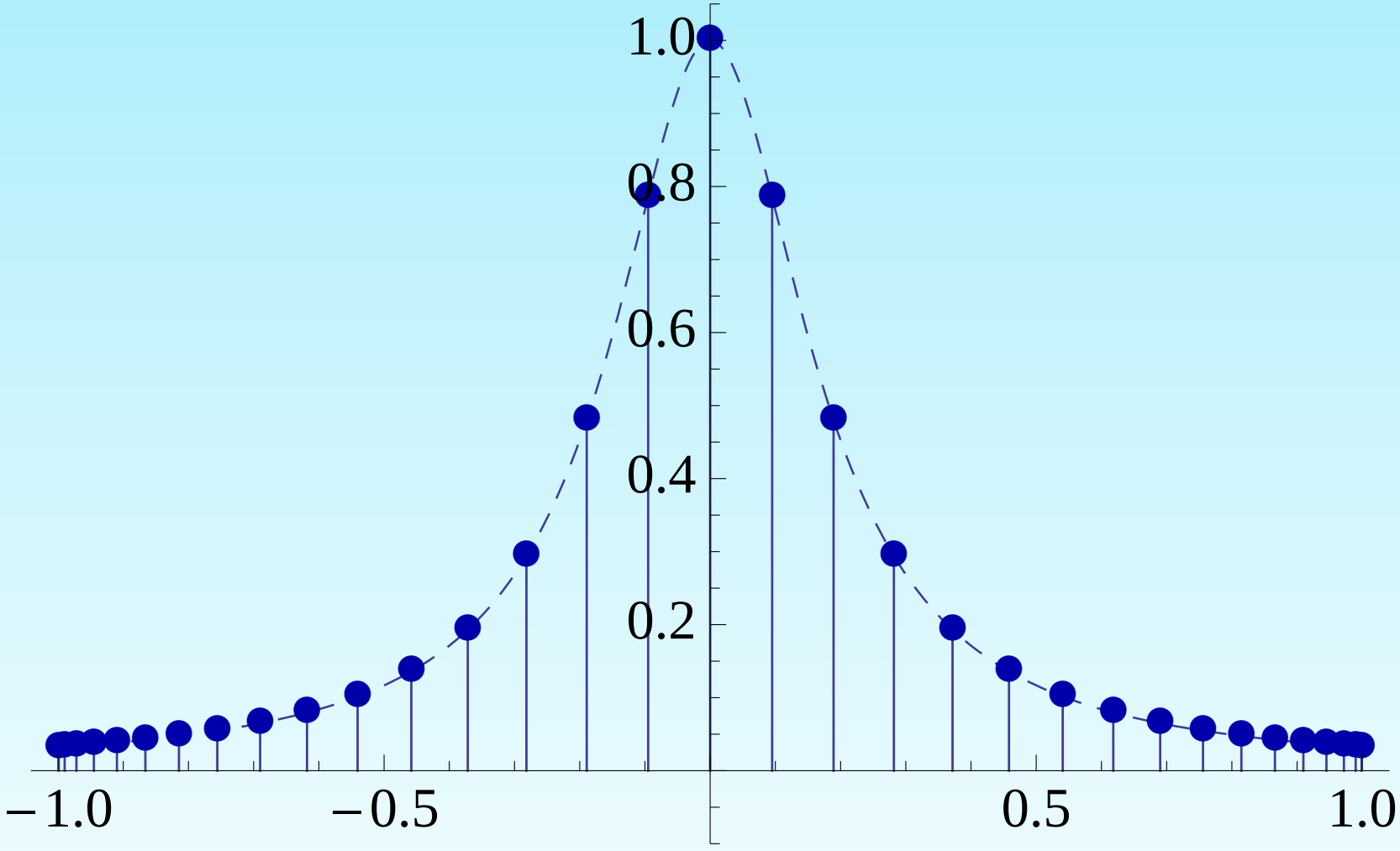
- $n = 17$

$$x_k = -\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}$$



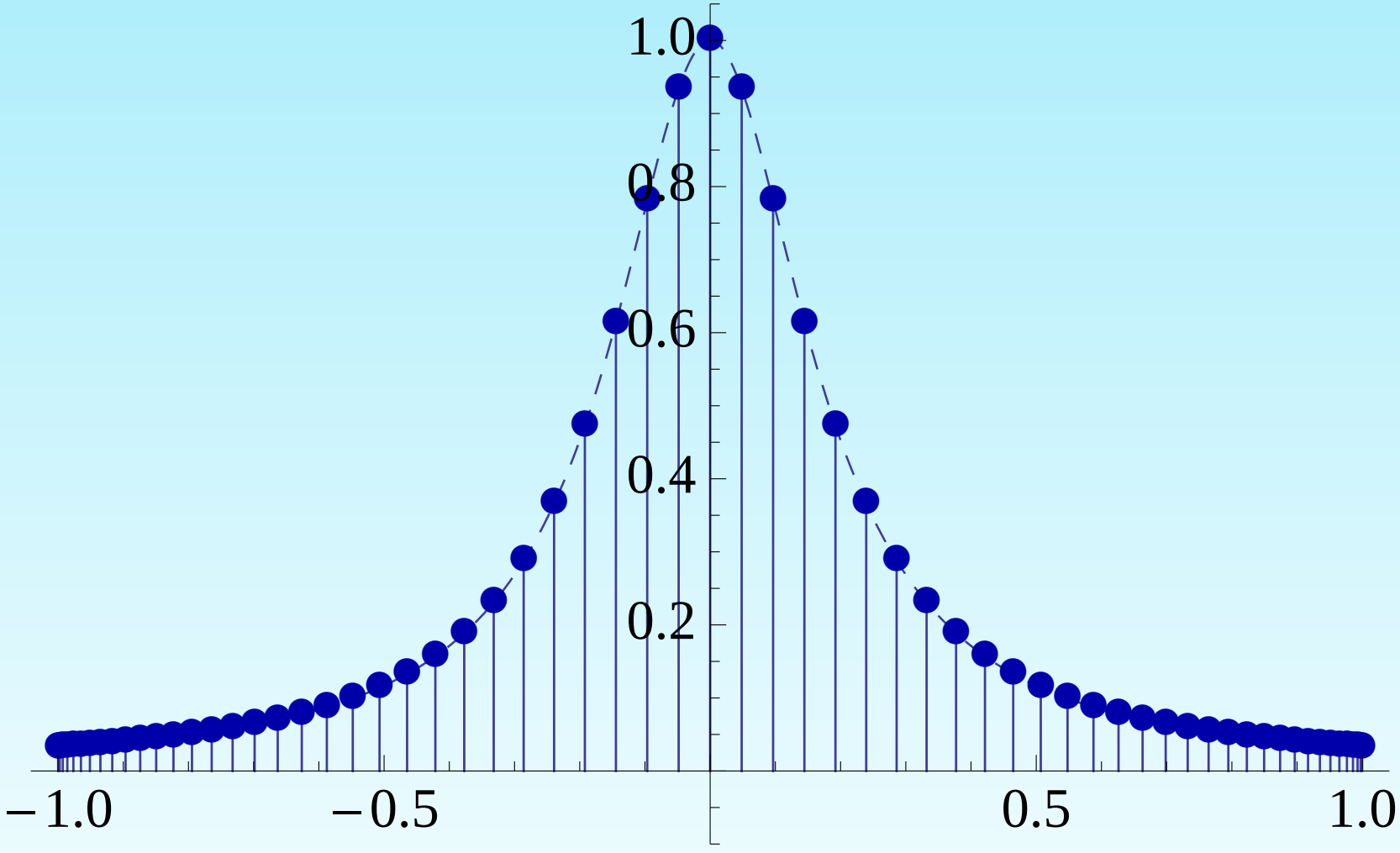
- $n = 33$

$$x_k = -\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}$$



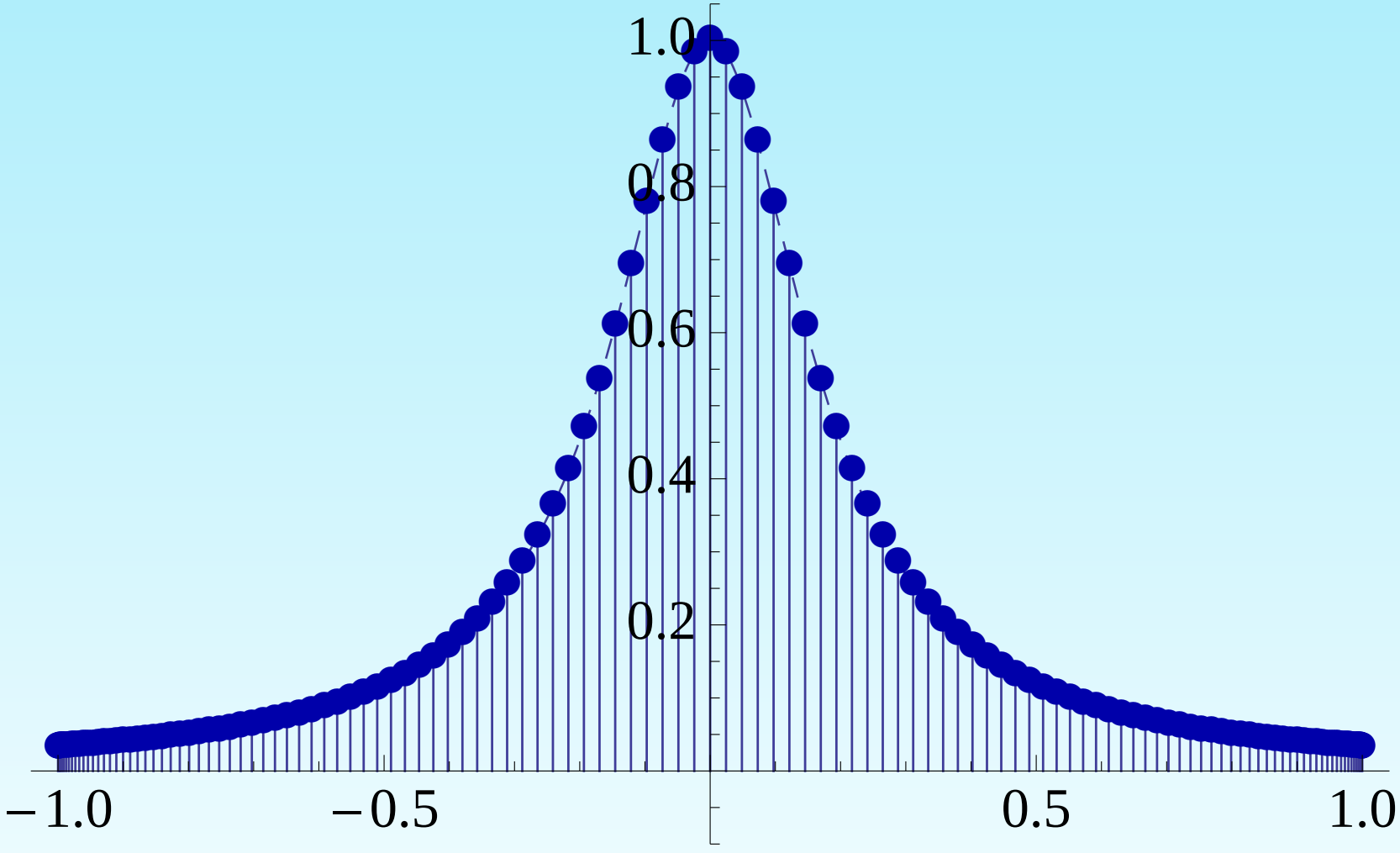
- $n = 65$

$$x_k = -\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}$$

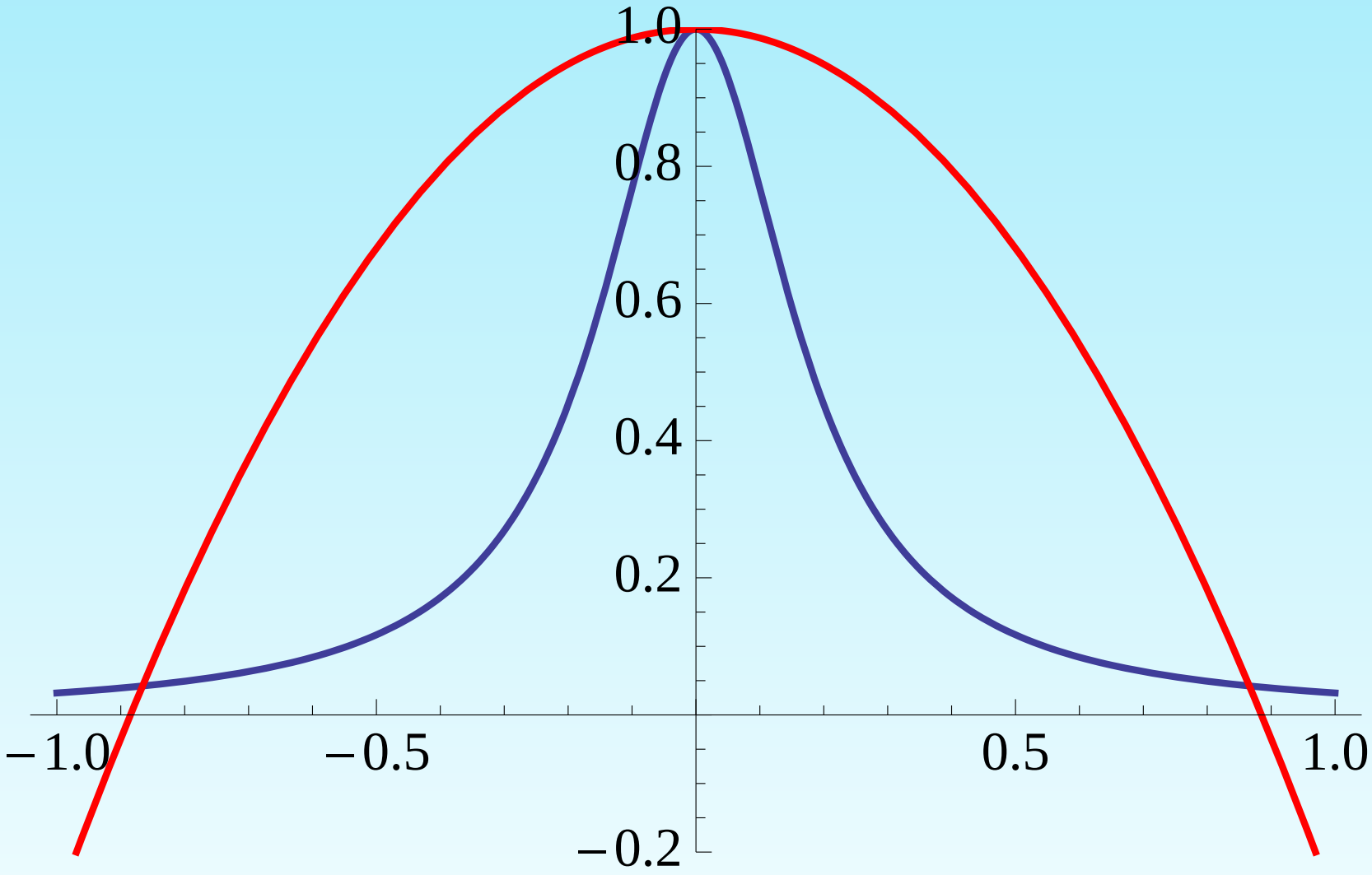


- $n = 129$

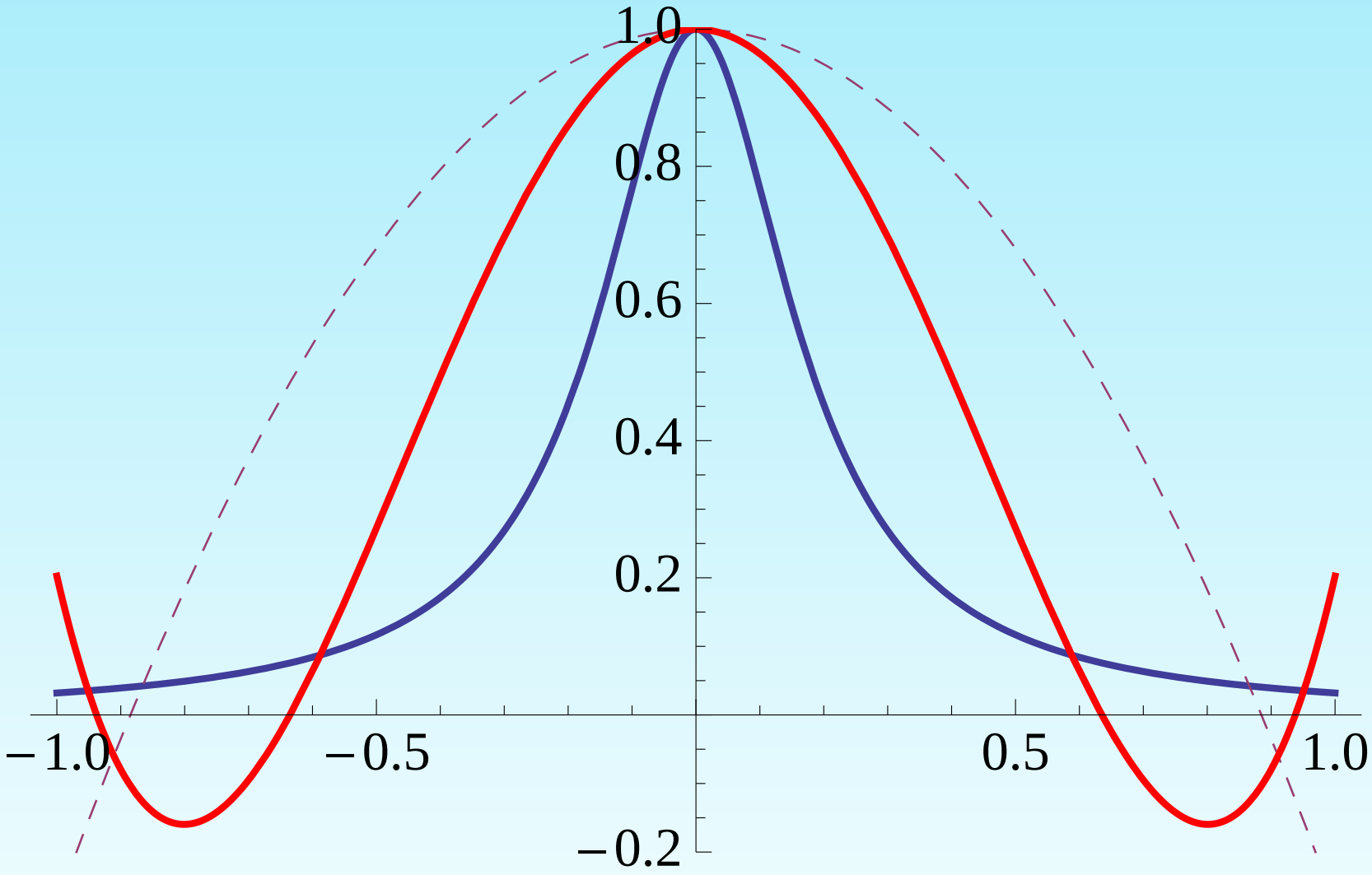
$$x_k = -\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}$$



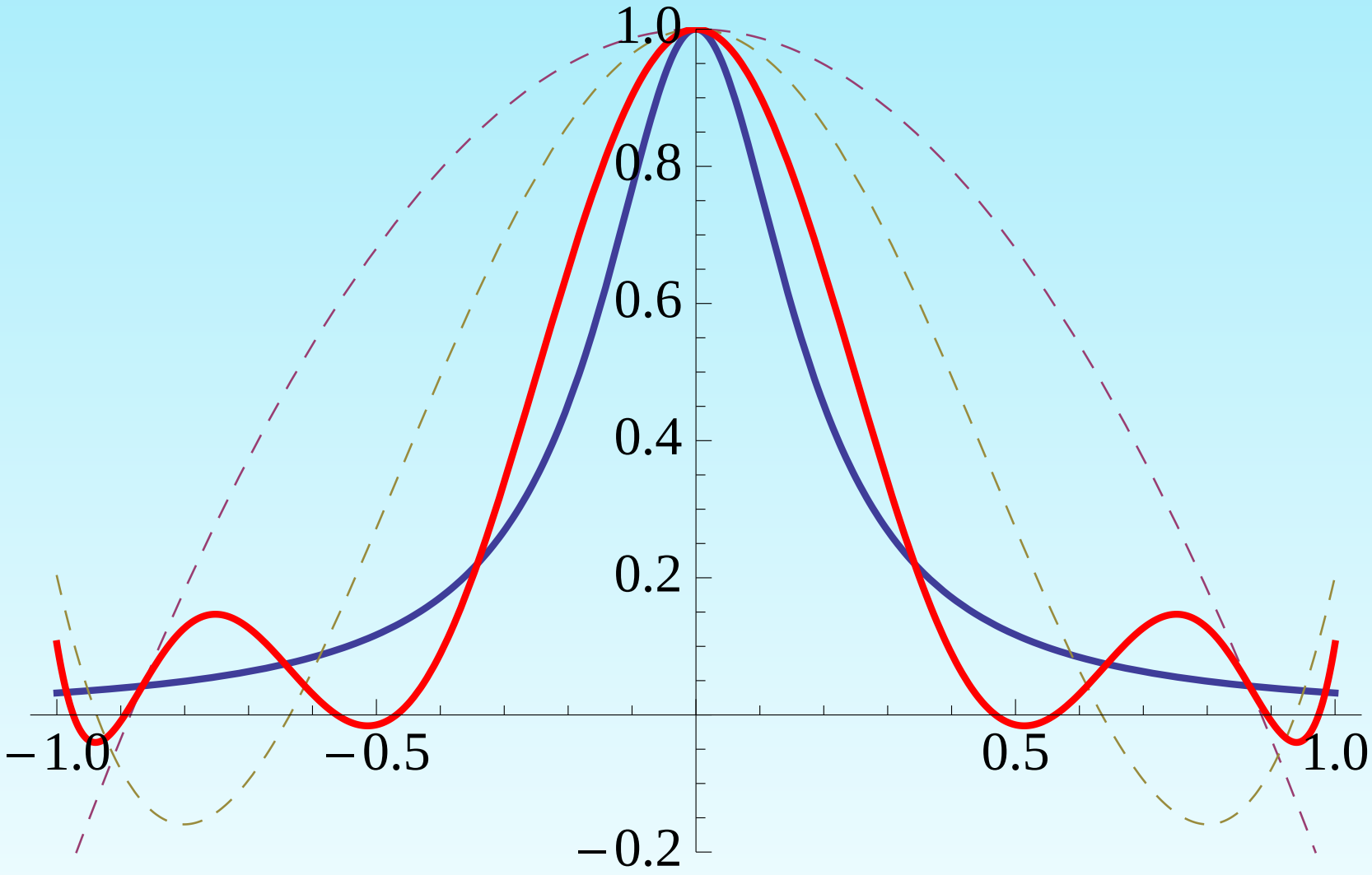
- $n = 3$



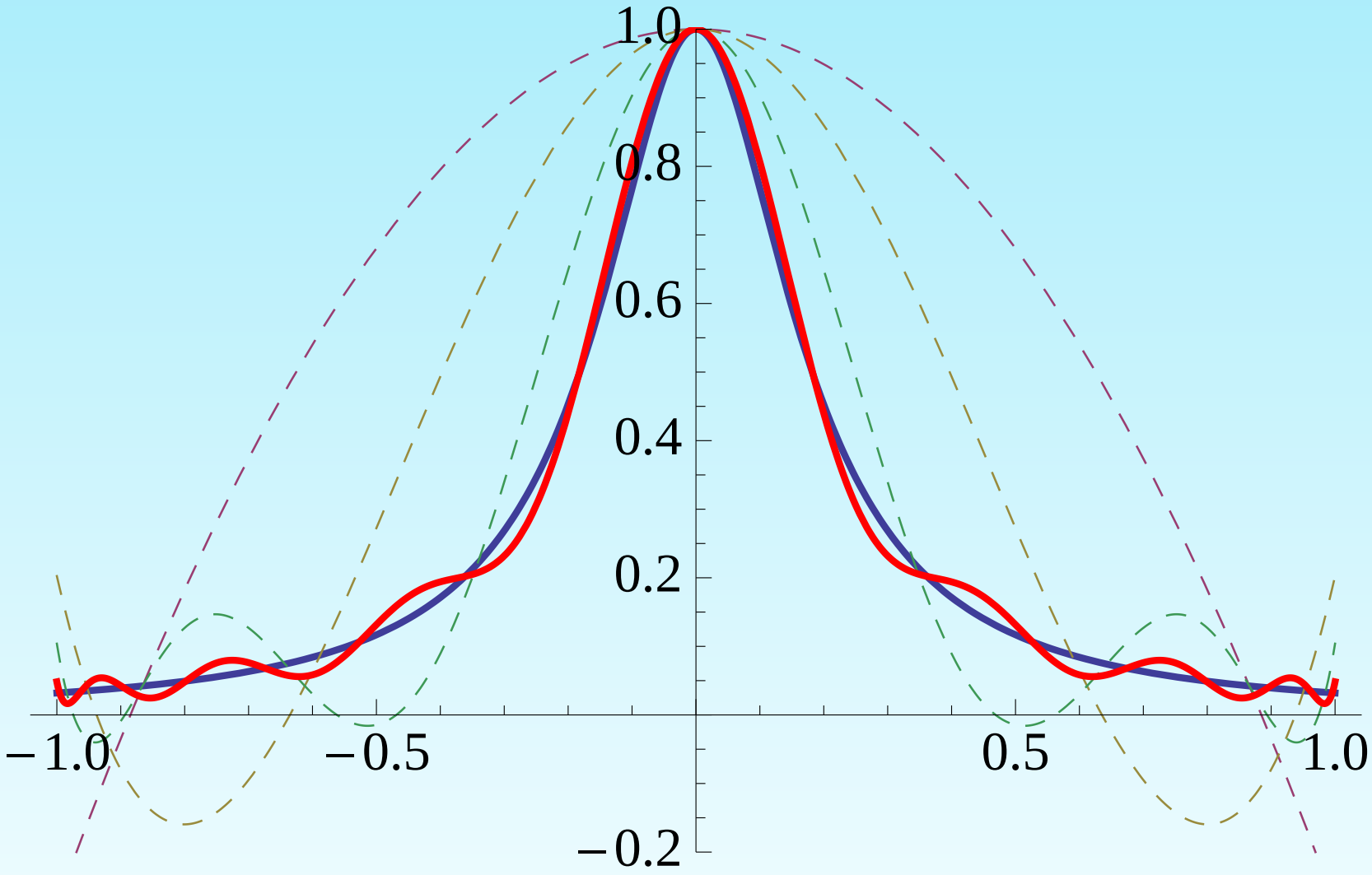
- $n = 5$



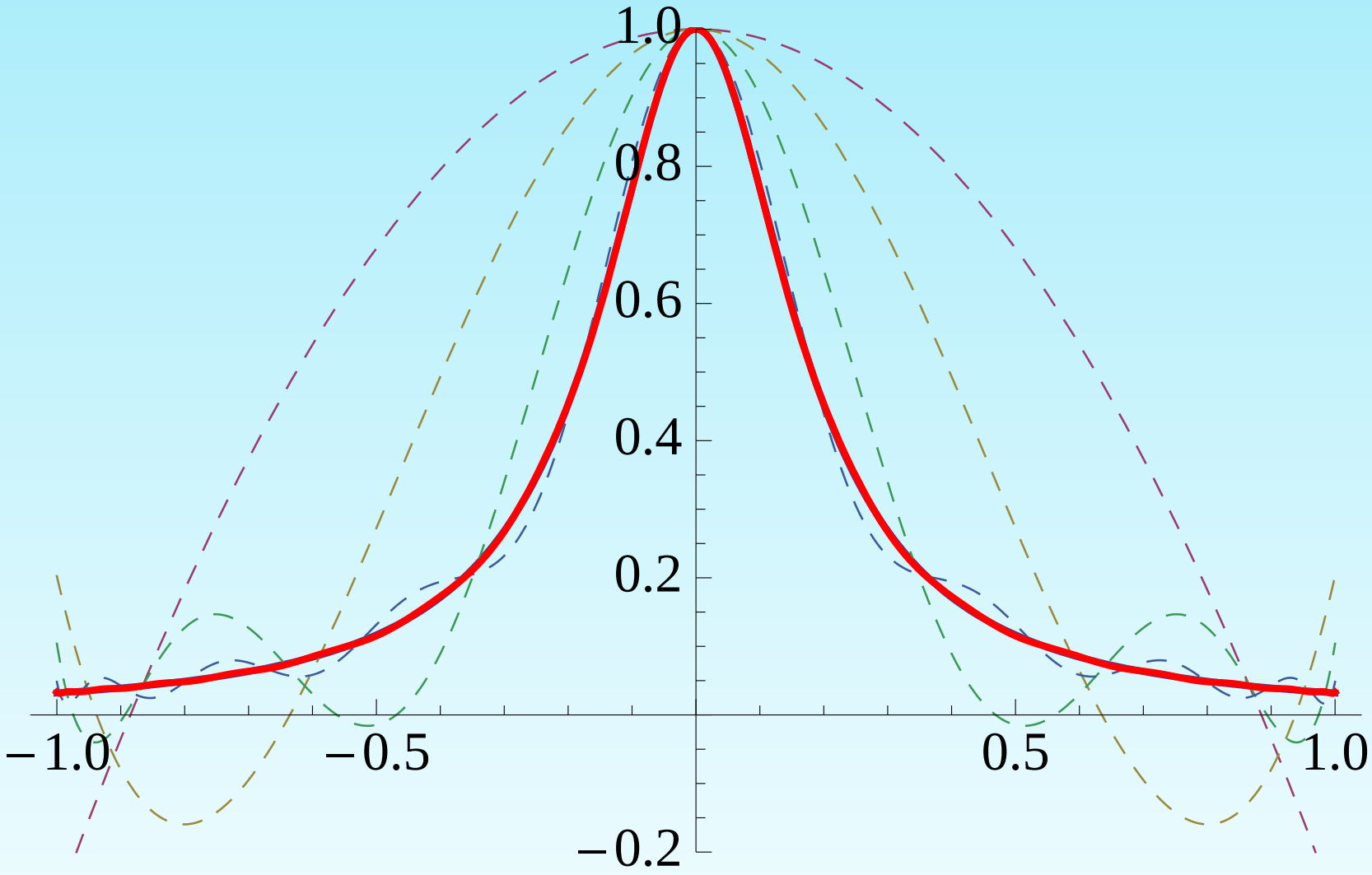
- $n = 9$



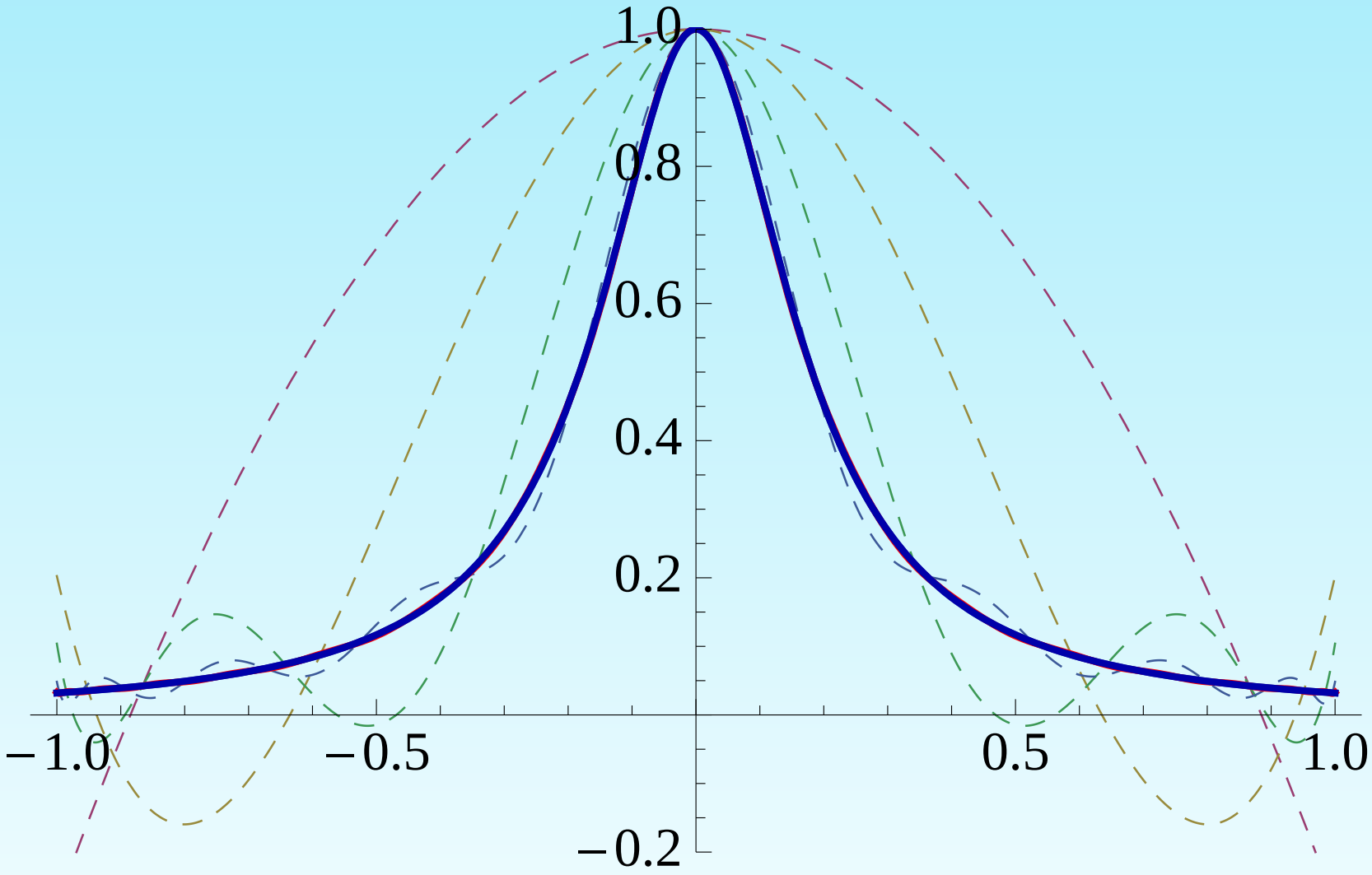
- $n = 17$



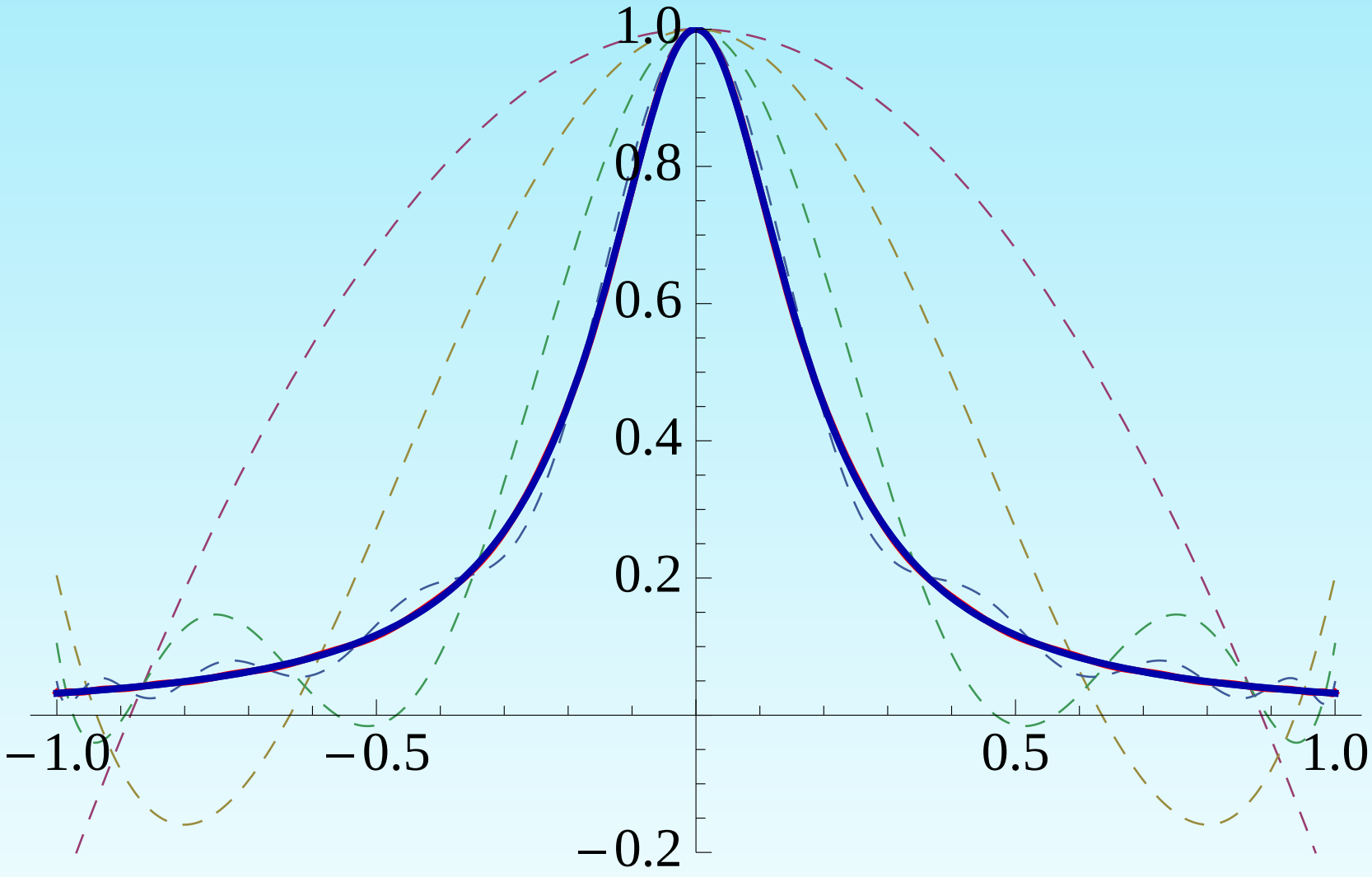
- $n = 33$



- $n = 33$



- $n = 33$



Konvergencija za svako $x \in [-1, 1]$