Пријемни испит за упис на Математички факултет, 01.07.2020.

Скице решења задатака

1. Нацртати график функције $f(x) = \max\{1+x, 1-x\} = \begin{cases} 1+x & \text{за } x \geqslant 0 \\ 1-x, & \text{за } x < 0 \end{cases}$. Види се да је $f(x) \geqslant 1$ за све $x \in \mathbb{R}$ и да је $f(0) = 1$. Дакле, једначина има решења ако и само ако је $b \geqslant 1$.

Одговор **B)**.

2. Из $4 = k \cdot 2^t + 4$ се добија $k \cdot 2^t = 0$, па како је увек $2^t > 0$, то је $k = 0$. Из $2^t = 3 \cdot 0 + 4 = 4$ следи $t = 2$.

Одговор **C)**.

3. Најмања вредност функције $g(x) = 2x^2 + 4x\sqrt{2} + 8$ је $g(-\sqrt{2}) = 4 > 0$, па је домен функције $f(x)$ скуп реалних бројева. Највећа вредност функције f једнака је $16 - \sqrt{4} = 14$.

Одговор **D)**.

4. Из Вијетових правила се добија да је $-\dfrac{b}{a} = x_1 + x_2 = \dfrac{6}{5}$ и $\dfrac{c}{a} = x_1x_2 = -\dfrac{19}{25}$, дакле $b = -\dfrac{6}{5}a$ и $c = -\dfrac{19}{25}a$. Најмањи природан број a за који су сва три коефицијента целобројна је 25.

Одговор **C)**.

5. Јасно је да мора бити $c \geqslant 0$ и $x \geqslant 0$. Скицирати графике функција $f(x) = \sqrt{x+c}$ и $g(x) = c - \sqrt{x}$ за $x \geqslant 0$. Види се да они имају (једну) заједничку тачку ако и само ако је $c = 0$ или $c \geqslant 1$. Може се решити и квадрирањем једначине $\sqrt{x+c} = c - \sqrt{x}$. Ако је $c = 0$, решење је $c = 0$; ако је $c \geqslant 1$, решење је $x = \left(\dfrac{c-1}{2}\right)^2$; иначе нема решења.

Одговор **E)**.

6. Сменом $2^x = t > 0$ се добија неједначина $3t^2 - 14t - 5 \leqslant 0$ чија су решења одређена са $-\frac{1}{3} \leqslant t \leqslant 5$, односно (због $t > 0$) са $0 < t \leqslant 5$. Скуп решења дате неједначине је $(-\infty, \log_2 5]$.

Одговор **C)**.

7. Нуле бројиоца су 2 и 4, а нуле имениоца су 1 и 3. Разматрајући интервале на које тачке 1, 2, 3 и 4 деле реалну праву, добија се да је скуп решења $(-\infty, 1) \cup (2, 3) \cup (4, +\infty)$.

Одговор **D)**.

8. Решавајући дати систем једначина добијамо $\log_2 x = \dfrac{10}{3}$ и $\log_3 x = -\dfrac{5}{3}$, па је $9\log_3 x \cdot \log_2 y = 9 \cdot \dfrac{\log_2 x}{\log_2 3} \cdot \dfrac{\log_3 y}{\log_3 2} = 9 \cdot \dfrac{10}{3} \cdot \left(-\dfrac{5}{3}\right) = -50$.

Одговор **A)**.

9. Означимо са x тражену дужину, са h висину датог, а са y висину „малог“ троугла при врху (нацртати слику). Важи однос $\dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{h}$, као и (из услова задатка) $2xy = ah$. Одатле се добија $x = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Одговор **D)**.

10. Хипотенуза правоуглог троугла је $6\sqrt{3}$. Ако је S врх дате пирамиде $SABC$ и O подножје њене висине, троуглови SOA, SOB и SOC су, према услову задатка, подударни, па је $AO = BO = CO$, тј. тачка O је центар описаног круга основе, дакле средиште хипотенузе. Како је полупречник описаног круга једнак $3\sqrt{3}$, то је (из правоуглог троугла AOS с углом код A једнаким 60°) висина пирамиде $(3\sqrt{3})\sqrt{3} = 9$, а запремина $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6\sqrt{2} \cdot 9 = 54\sqrt{2}$.

Одговор **A)**.

11. Решења су: $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$ (решења 0, π и 2π једначине $\operatorname{tg} 3x = 0$ не припадају домену дате једначине).

Одговор **B)**.

12. Из синусне теореме се добија $\frac{25}{\sin\alpha} = \frac{30}{2\sin\alpha\cos\alpha}$, одакле је $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ и $\sin\alpha = \frac{4}{5}$. Даље је $\cos\beta = \cos 2\alpha = -\frac{7}{25}$, $\sin\beta = \frac{24}{25}$ и $\sin\gamma = \sin(\pi - (\alpha+\beta)) = \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \frac{44}{125}$ (или, на други начин, $\sin\gamma = \sin(\pi - 3\alpha) = \sin 3\alpha = 3\cos^2\alpha\sin\alpha - \sin^3\alpha = \frac{44}{125}$), па поново из синусне теореме следи $c = 11$ (може се добити и помоћу косинусне теореме).

Одговор **B)**.

13. Заједничке тачке праве и криве одређене су условом $x^2 + (-2x+n)^2 - 14x + 29 = 0$, тј. $5x^2 - 2(2n+7)x + n^2 + 29 = 0$. Последња једначина има јединствено решење ако и само ако је $D = -n^2 + 28n - 96 = 0$, тј. $n \in \{4, 24\}$. Тражени збир квадрата је 592.

Одговор **E)**.

14. Из првог услова следи $3a_7 = a_6 + a_7 + a_8 = 0$, па је $a_7 = 0$. Тада је $a_1 = -6d$, $a_2 = -5d$, $\ldots$, $a_6 = -d$, па је $-6\cdot 5\cdot 4d^3 = 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2d^6$, одакле (због $d \neq 0$) $d^3 = -\frac{1}{6}$. Производ прва три члана низа је $-6\cdot 20\cdot\left(-\frac{1}{6}\right) = 20$.

Одговор **D)**.

15. Сређивањем се добија $z = 1 + 8i$.

Одговор **A)**.

16. Решења једначине $\left(x^2 + x - \frac{1}{4}\right)\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) = 0$ су $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{2}}{2}$ и $x_3 = x_4 = \frac{1}{2}$.

Одговор **D)**.

17. Тачна су тврђења (I), (III) и (IV). Тврђење (II) није тачно (на пример, $6 \mid 30$ и $10 \mid 30$ али $6\cdot 10 \nmid 30$).

Одговор **D)**.

18. Мора бити $4x - 3 - x^2 \geqslant 0$, тј. $1 \leqslant x \leqslant 3$ и ($0 \leqslant \pi x \leqslant \pi$ или $2\pi \leqslant \pi x \leqslant 3\pi$), дакле $x \in \{1\}$ или $x \in [2,3]$.

Одговор **A)**.

19. Дозвољени избори клупа су: 1,3,5; 1,3,6; 1,4,6 и 2,4,6 (4 могућности). У свакој клупи ученик може седети лево или десно ($2^3 = 8$ могућности). На изабраним местима се 3 ученика могу распоредити на $3! = 6$ начина. Укупно: $4\cdot 8\cdot 6 = 192$.

Одговор **E)**.

20. У једнакокраком троуглу CDE је $\angle CDE = \gamma = 40^\circ$ и $\angle DEC = 100^\circ$, у једнакокраком троуглу ADE је $\angle ADE = 140^\circ$ и $\angle DEA = \angle EAD = 20^\circ$, а у једнакокраком троуглу ABE је $\angle BEA = 60^\circ$ и $\angle EAB = \alpha - 20^\circ = 60^\circ$, па је $\alpha = 80^\circ$, $\beta = 60^\circ$ и $\alpha - \beta = 20^\circ$.

Одговор **B)**.