Представљање извештаја о урађеној докторској дисертацији кандидата Милана Лазаревића

под називом ,,Неједнакости Коши-Шварца и Грис-Ландауа за елементарне операторе и трансформере типа унутрашњег производа на Q и Q* идеалима компактних оператора"

Данко Р. Јоцић

Математички факултет
Универзитет у Београду

28.08.2020.

Научни и стручни рад кандидата

Објављени радови:

1. D. R. Jocić, Đ. Krtinić, M. Lazarević, P. Melentijević, S. Milošević, *Refinements of operator Landau and Grüss inequalities for elementary operators on ideals associated to p-modified unitarily invariant norms*, Complex Anal. Oper. Theory **12** (2018), 195-205.

   ISSN: 1661-8254 (Print), 1661-8262 (Electronic), IF 2017: 0,799 M22

2. D. R. Jocić, M. Lazarević, S. Milošević, *Norm inequalities for a class of elementary operators generated by analytic functions with non-negative Taylor coefficients in ideals of compact operators related to p-modified unitarily invariant norms*, Linear Algebra Appl. **540** (2018), 60-83.

   ISSN: 0024-3759, IF 2017: 0,972 M21

3. D. R. Jocić, Đ. Krtinić, M. Lazarević, *A note on the paper "Norm inequalities in operator ideals" [J. Funct. Anal. 255 (11) (2008), 3208-3228] by G. Larotonda*, J. Funct. Anal. **277** (2019), 641-642.

   ISSN: 0022-1236, IF 2018: 1,637 M21a

4. M. Lazarević, *Grüss-Landau inequalities for elementary operators and inner product type transformers in Q and Q^* norm ideals of compact operators*, Filomat **33** (2019), 2447-2455.

   ISSN: 0354-5180 (Print), 2406-0933 (Online), IF 2018: 0,789 M22

5. D. R. Jocić, M. Lazarević, S. Milošević, *Inequalities for generalized derivations of operator monotone functions in norm ideals of compact operators*, Linear Algebra Appl. **586** (2020), 43-63.

   ISSN: 0024-3759, IF 2017: 0,972 M21

6. D. R. Jocić, Đ. Krtinić, M. Lazarević, *Cauchy–Schwarz inequalities for inner product type transformers in Q* norm ideals of compact operators,* Positivity **24** (2020), 933-956.

   ISSN: 1385-1292 (Print) 1572-9281 (Online), IF 2017: 0,920 M21; IF 2018: 0,833 M22

Учешћа кандидата на научним и стручним скуповима

7. D. R. Jocić, Đ. Krtinić, M. Lazarević, P. Melentijević, S. Milošević, *Inequalities related to Landau-Grüss inequalities for inner product type integral transformers and for elementary operators acting on ideals of compact operators*, VIII симпозијум „Математика и примене", 2017.
8. D. R. Jocić, M. Lazarević, S. Milošević, *Norm inequalities for a class of elementary operators*, XIV Serbian Mathematical Congress, 2018.
9. D. R. Jocić, M. Lazarević, S. Milošević, *Inequalities for generalized derivations of operator monotone functions in norm ideals of compact operators*, X симпозијум „Математика и примене", 2019.

Садржај дисертације

Докторска дисертација ,,Неједнакости Коши-Шварца и Грис-Ландауа за елементарне операторе и трансформере типа унутрашњег производа на Q и Q* идеалима компактних оператора" написана је на viii+90+ii стране.

Структура рукописа је следећа:

Насловне стране, подаци о члановима комисије, резиме, садржај

Предговор

1. Увод

1.1. Компактни оператори и њихове сингуларне вредности

1.2. Симетрично нормирајуће функције и њима придружени идеали компактних оператора

1.3. Ky-Fan-ове и p-модификоване унитарно инваријантне норме

1.4. Слаби* интеграли, трансформери типа унутрашњег производа и преглед познатих Cauchy-Schwarz-ових норма неједнакости за ову класу трансформера

1.5. Оператор монотоне функције као поткласа Pick-ових функција

2. Cauchy-Schwarz-ове неједнакости за σ-елементарне трансформере

2.1. Неки аспекти различитих конвергенција операторних низова

2.2. Cauchy-Schwarz-ове неједнакости за σ-елементарне трансформере на Q и Q* идеалима

2.3. Примене на σ-елементарне трансформере генерисаних аналитичким функцијама са ненегативним Taylor-овим коефицијентима

3. Cauchy-Schwarz-ове неједнакости и конвергенције σ-елементарних и т.у.п. трансформера у Q и Q* идеалима компактних оператора

3.1. Операторна Cauchy-Schwarz-ова неједнакост и конвергенција код σ-елементарних трансформера

3.2. Cauchy-Schwarz-ове неједнакости за т.у.п. трансформере на Q и Q* идеалима

3.3. Оператор вредносна Fourier-ова трансформација и Fourier-ови трансформери

У уводном поглављу уведене су дефиниције, ознаке (као и одређене конвенције) и наведена основна својства компактних оператора и њихових сингуларних вредности, симетрично нормирајућих функција и њима придружених идеала компактних оператора, Ки Фанових и p-модификованих унитарно инваријантних норми, слабих* интеграла и трансформера типа унутрашњег производа, као и оператор монотоних функција као важне поткласе Пикових функција. Такође је дат и преглед претходно познатих Коши-Шварцових норма неједнакости за трансформере типа унутрашњег производа.

У глави 2 приказани су резултати из рада [JLM18]. Прво су доказане Коши-Шварцове норма неједнакости за σ-елементарне трансформере (трансформере са пребројиво много сабирака) који делују на $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, где је $\mathcal{H}$ Хилбертов простор, при чему алгебарски облик варијанти ових неједнакости зависи од природе разматраних норми. У случају $\|\cdot\|_{\Phi^{(p)*}}$ норми ($p \geqslant 2$), тј. норми дуалних p-модификацијама $\|\cdot\|_{\Phi^{(p)}}$ унитарно инваријантних норми $\|\cdot\|_{\Phi}$, где је Φ симетрично нормирајућа функција, дата је нова Коши-Шварцова норма неједнакост у оквиру Леме 2.6

Лема (Јоцић, Лазаревић, Милошевић (LAA 2018))

Нека је Φ с.н. функција и $p \geqslant 2$. Ако су $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{B_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ ј.к.с. фамилије у $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, такве да је (бар) једна од њих фамилија међусобно комутирајућих нормалних оператора, тада је за све $X \in \mathcal{C}_{\Phi^{(p)*}}(\mathcal{H})$

$$\boxed{\Big\|\sum_{n=1}^{\infty} A_n X B_n\Big\|_{\Phi^{(p)*}} \leqslant \Big\|\Big(\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* A_n\Big)^{1/2} X \Big(\sum_{n=1}^{\infty} B_n B_n^*\Big)^{1/2}\Big\|_{\Phi^{(p)*}}.} \tag{1}$$

Након тога дат је низ примена добијених неједнакости, где је између осталог показано да за аналитичку функцију f са ненегативним Тејлоровим коефицијентима важи

Теорема (Јоцић, Лазаревић, Милошевић (LAA 2018))

Нека су $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ и ј.к.с. и м.к.н.о. фамилије у $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ и нека је f аналитичка функција са ненегативним Тејлоровим коефицијентима, таква да је $f(\|\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* A_n\|) < +\infty$ и $f(\|\sum_{n=1}^{\infty} B_n^* B_n\|) < +\infty$ (што је увек испуњено ако је $\max\{\|\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* A_n\|, \|\sum_{n=1}^{\infty} B_n^* B_n\|\} < R_f$). Тада је за сваку с.н. функцију Φ и све $X \in \mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H})$

$$\left\| f\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n \otimes B_n\right) X \right\|_\Phi \leqslant \left\| \sqrt{f\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* A_n\right)}\, X \sqrt{f\left(\sum_{n=1}^{\infty} B_n^* B_n\right)} \right\|_\Phi . \qquad (2)$$

Такође дати су илустративни примери конкретних функција овог типа.

У глави 3 приказани су резултати из рада [JKL20], почевши од леме 3.1 у којој се разматрају операторне и Коши-Шварцове неједнакости за униформну, Хилберт-Шмитову и нуклеарну норму σ-елементарних трансформера, као и питања конвергенције тих трансформера у придруженим идеалима компактних оператора.

Лема (Јоцић, Кртинић, Лазаревић (Positivity 2020))

(a) Нека су $A^*, B \in L^2_G(\Omega, \mu, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$, $f, g \in \mathcal{H}$ и $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.
(a1) Пресликавање $\Omega \to \mathcal{B}(\mathcal{H}): t \mapsto A_t X B_t$ је слабо*-интеграбилно и важи

$$\left(\int_\Omega |\langle A_t X B_t f, g\rangle| \, d\mu(t)\right)^2 \leqslant \int_\Omega \langle A_t A_t^* g, g\rangle \, d\mu(t) \int_\Omega \langle B_t^* X^* X B_t f, f\rangle \, d\mu(t),$$

$$\left|\int_\Omega A_t X B_t \, d\mu(t)\right|^2 \leqslant \left\|\int_\Omega A_t A_t^* \, d\mu(t)\right\| \int_\Omega B_t^* X^* X B_t \, d\mu(t).$$

Лема (Јоцић, Кртинић, Лазаревић (Positivity 2020))

(a2) За свако $\varepsilon > 0$

$$\left|\left(\varepsilon I + \int_\Omega A_t A_t^* \, d\mu(t)\right)^{-1/2} \int_\Omega A_t X B_t \, d\mu(t)\right|^2 \leqslant \int_\Omega B_t^* X^* X B_t \, d\mu(t). \qquad (3)$$

(a3) Ако је $\int_\Omega A_t A_t^* \, d\mu(t)$ додатно (ограничено) инвертибилан оператор, тада се εI може изоставити у неједнакости (3).

(б) Ако $\delta_n \uparrow \delta$ $(= \cup_{n=1}^\infty \delta_n)$ кад $n \to +\infty$ за неке $\delta_n \in \mathfrak{M}$, $A^*, B \in L_G^2(\Omega, \mu, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ и $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, тада $\int_{\delta_n} A_t A_t^* \, d\mu(t) \to \int_\delta A_t A_t^* \, d\mu(t)$, $\int_{\delta_n} B_t^* B_t \, d\mu(t) \to \int_\delta B_t^* B_t \, d\mu(t)$ и $\int_{\delta_n} A_t X B_t \, d\mu(t) \to \int_\delta A_t X B_t \, d\mu(t)$ јако кад $n \to +\infty$.

(в) Нека су $\{A_n^*\}_{n=1}^\infty$ и $\{B_n\}_{n=1}^\infty$ ј.к.с. фамилије и $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

(в1) Тада ред $\sum_{n=1}^\infty A_n X B_n$ јако конвергира и

$$\left|\sum_{n=1}^\infty A_n X B_n\right|^2 \leqslant \left\|\sum_{n=1}^\infty A_n A_n^*\right\| \sum_{n=1}^\infty B_n^* X^* X B_n.$$

Лема (Јоцић, Кртинић, Лазаревић (Positivity 2020))

(в2) Ако је $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ додатно и м.к.н.о. фамилија, тада је

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} A_n X B_n\right|^2 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} B_n^* X^* \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* A_n\right) X B_n.$$

(г1) Ако су $\{A_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{B_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ ј.к.с. фамилије и $X \in \mathfrak{C}_2(\mathcal{H})$, тада $\sum_{n=1}^{\infty} A_n X B_n$ конвергира у Хилберт-Шмитовој норми $\|\cdot\|_2$ и

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty} A_n X B_n\right\|_2 \leqslant \left\|\sum_{n=1}^{\infty} A_n A_n^*\right\|^{1/2} \left\|X \left(\sum_{n=1}^{\infty} B_n B_n^*\right)^{1/2}\right\|_2.$$

(г2) Слично, ако су $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ ј.к.с. фамилије и $X \in \mathfrak{C}_2(\mathcal{H})$, тада $\sum_{n=1}^{\infty} A_n X B_n$ конвергира у Хилберт-Шмитовој норми $\|\cdot\|_2$ и

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty} A_n X B_n\right\|_2 \leqslant \left\|\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* A_n\right)^{1/2} X\right\|_2 \left\|\sum_{n=1}^{\infty} B_n^* B_n\right\|^{1/2}.$$

Лема (Јоцић, Кртинић, Лазаревић (Positivity 2020))

(д) Ако су $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ и $\{B_n^*\}_{n=1}^\infty$ ј.к.с. фамилије и $X \in \mathfrak{C}_1(\mathcal{H})$, тада $\sum_{n=1}^\infty A_n X B_n$ апсолутно конвергира у $\mathfrak{C}_1(\mathcal{H})$ и

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} A_n X B_n \right\|_1 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \|A_n X B_n\|_1 \leqslant \left\| \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* A_n \right)^{1/2} X \left(\sum_{n=1}^{\infty} B_n B_n^* \right)^{1/2} \right\|_1 .$$

(е) Ако је $\{A_n^*\}_{n=1}^\infty$ ј.к.с. фамилија, $\{B_n\}_{n=1}^\infty$ и ј.к.с. и м.к.н.о. фамилија и $X \in \mathfrak{C}_{\Phi^{(p)}}^{(\circ)}(\mathcal{H})$, тада $\sum_{n=1}^\infty A_n X B_n$ конвергира у норми $\|\cdot\|_{\Phi^{(p)}}$. Исти закључак важи и ако је $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ и ј.к.с. и м.к.н.о. фамилија, а $\{B_n\}_{n=1}^\infty$ ј.к.с. фамилија и $X \in \mathfrak{C}_{\Phi^{(p)}}^{(\circ)}(\mathcal{H})$.

Наредна лема 3.2 представља уопштење Парсевалове једнакости за јако квадратно интеграбилне фамилије оператора и обезбеђује ефикасан метод дискретизације којим се постојеће Коши-Шварцове норма неједнакости за σ-елементарне трансформере уопштавају на трансформере типа унутрашњег производа.

Лема (Јоцић, Кртинић, Лазаревић (Positivity 2020))

Нека је $L^2(\Omega,\mu)$ сепарабилан Хилбертов простор и нека је $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ нека његова ортонормирана база. Тада за свако $B \in L_G^2(\Omega,\mu,\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ сви Фуријеови коефицијенти $\widehat{B}_n \overset{\text{деф}}{=} \int_\Omega B_t \overline{u_n(t)}\, d\mu(t) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ и

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} |\widehat{B}_n|^2 = \int_\Omega |B_t|^2\, d\mu(t).}$$

Ако је при томе и $A \in L_G^2(\Omega,\mu,\mathcal{B}(\mathcal{H}))$, тада је за свако $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$

$$\boxed{\int_\Omega A_t^* X B_t\, d\mu(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\widehat{A}_n\right)^* X \widehat{B}_n.}$$

Примери те примене обухватају између осталог и неједнакост

$$\left\|\int_\Omega A_t X B_t \, d\mu(t)\right\|_{\Phi^{(p)*}} \leqslant \left\|\left(\int_\Omega A_t^* A_t \, d\mu(t)\right)^{1/2} X \left(\int_\Omega B_t B_t^* \, d\mu(t)\right)^{1/2}\right\|_{\Phi^{(p)*}} \quad (4)$$

у теореми 3.5 из [JLM18], при чему је $p \geqslant 2, X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, Φ је с.н. функција, $A, B^* \in L^2_G(\Omega, \mu, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ и бар једна од фамилија $\{A_t\}_{t\in\Omega}$ или $\{B_t\}_{t\in\Omega}$ је м.к.н.о. фамилија. Претходна норма неједнакост представља недискретно уопштење неједнакости (1).

Такође, следећа теорема 3.7. представља проширење [J05, th. 4.1] и допуњује [JMĐ, th. 3.5].

Теорема (Јоцић, Кртинић, Лазаревић (Positivity 2020))

Нека је Φ с.н. функција, $p \geqslant 2$, $X \in \mathfrak{C}_{\Phi^{(p)*}}(\mathcal{H})$ и $A, B^* \in L^2_G(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(\mathcal{H}))$ такве да је бар једна од фамилија $\mathscr{A} \overset{\text{деф}}{=} \{A_t\}_{t\in\Omega}$ и $\mathscr{B}^* \overset{\text{деф}}{=} \{B_t^*\}_{t\in\Omega}$ м.к.н.о. фамилија.

(a) Ако је, додатно,

$$\begin{aligned} \inf_{n\in\mathbb{N}} \left\| \int_{\Omega^n} |A_{t_1} \cdots A_{t_n}|^2 \, d\mu^n(t_1, \cdots, t_n) \right\|^{\frac{1}{n}} &\leqslant 1, \\ \inf_{n\in\mathbb{N}} \left\| \int_{\Omega^n} |B^*_{t_1} \cdots B^*_{t_n}|^2 \, d\mu^n(t_1, \cdots, t_n) \right\|^{\frac{1}{n}} &\leqslant 1 \end{aligned} \tag{5}$$

$$\text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega^n} \|A_{t_1} \cdots A_{t_n} h\|^2 + \|B^*_{t_1} \cdots B^*_{t_n} h\|^2 \, d\mu^n(t_1, \cdots, t_n) < +\infty \tag{6}$$

за све $h \in \mathcal{H}$, тада $\|X\|_{\Phi^{(p)*}} \leqslant \left\| \Delta_{\mathscr{A}}^{-1} \Big(X - \int_\Omega A_t X B_t \, d\mu(t) \Big) \Delta_{\mathscr{B}^*}^{-1} \right\|_{\Phi^{(p)*}}.$

Теорема (Јоцић, Кртинић, Лазаревић (Positivity 2020))

(в) Додатно, ако је $\int_\Omega A_t^* A_t \, d\mu(t) \leqslant I$ и $\int_\Omega B_t B_t^* \, d\mu(t) \leqslant I$, тада

$$\left\| \left(I - \int_\Omega A_t^* A_t \, d\mu(t) \right)^{1/2} X \left(I - \int_\Omega B_t B_t^* \, d\mu(t) \right)^{1/2} \right\|_{\Phi^{(p)*}} \leqslant \left\| X - \int_\Omega A_t X B_t \, d\mu(t) \right\|_{\Phi^{(p)*}}.$$

Примери примене неједнакости (4) обухватују Коши-Шварцове норма неједнакости за транформер вредносне Фуријеове трансформације $\hat{\mu}(A) \overset{\text{деф}}{=} \mathcal{F}\mu(A) \overset{\text{деф}}{=} \int_{\mathbb{R}} e^{itA}\, d\mu(t)$, односно $\hat{f}(A) \overset{\text{деф}}{=} \mathcal{F}f(A) \overset{\text{деф}}{=} \int_{\mathbb{R}} e^{itA} f(t)\, dt$, приказане у теореми 3.10, као и деривациону норма неједнакост

$$\left\|\sqrt{iA^* - iA}\,(\hat{\mu}(A)X - X\hat{\mu}(B))\sqrt{iB^* - iB}\right\|_{\Phi^{(p)*}} \leqslant \left\|\sqrt{I - |\hat{\mu}(A)|^2}(AX - XB)\sqrt{I - |\hat{\mu}(B)^*|^2}\right\|_{\Phi^{(p)*}}$$

за оператор вредносне Фуријеове трансформације класе комплексних мера, евалуираних на дисипативним операторима A и B, од којих је бар један нормалан.

У глави 4 разматрају се резултати из радова [JKLMM] и [Laz19], почевши од леме 4.1 из [JKLMM] и операторног идентитета.

Лема (JKЛММ (CAOT 2018))

Ако $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in (0,1]$ задовољавају $\sum_{n=1}^{N} \alpha_n = 1$ за неко $N \in \mathbb{N}$, ако $X \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ и $\{A_1, \ldots, A_N\}$ и $\{B_1, \ldots, B_N\}$ су фамилије у $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ и ако за $c > 0$ важи $c \geqslant \left\| \sum_{n=1}^{N} \alpha_n^{-1} A_n^* A_n - \left| \sum_{n=1}^{N} A_n \right|^2 \right\|^{\frac{1}{2}}$, тада је

$$\left| \sum_{n=1}^{N} \alpha_n^{-1} A_n^* X B_n - \left(\sum_{n=1}^{N} A_n^* \right) X \left(\sum_{n=1}^{N} B_n \right) \right|^2$$
$$+ \sum_{1 \leqslant m < n \leqslant N} \alpha_m \alpha_n \left| (\alpha_m^{-1} A_m - \alpha_n^{-1} A_n) \left(cI + \left(c^2 I - \sum_{n=1}^{N} \alpha_n^{-1} A_n^* A_n + \left| \sum_{n=1}^{N} A_n \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{-1} \right.$$
$$\left. \times \left(\sum_{n=1}^{N} \alpha_n^{-1} A_n^* X B_n - \left(\sum_{n=1}^{N} A_n^* \right) X \left(\sum_{n=1}^{N} B_n \right) \right) - cX(\alpha_m^{-1} B_m - \alpha_n^{-1} B_n) \right|^2$$
$$= c^2 \left(\sum_{n=1}^{N} \alpha_n^{-1} B_n^* X^* X B_n - \left| X \sum_{n=1}^{N} B_n \right|^2 \right). \tag{7}$$

На основу идентитета (7) изведене су операторна Грис-Ландауова неједнакост за елементарне трансформере (операторе) у последици 4.2, одакле се у теореми 4.5 за $p > 0$ непосредно добија неједнакост

Теорема (ЈКЛММ (CAOT 2018))

Ако је Φ с.н. функција, $p > 0$, тада је под условима Леме 4.1

$$\left\|\sum_{n=1}^{N} \alpha_n^{-1} A_n^* X B_n - \left(\sum_{n=1}^{N} A_n^*\right) X \left(\sum_{n=1}^{N} B_n\right)\right\|_{\Phi^{(p)}}^{p}$$
$$\leqslant \left\|\sum_{n=1}^{N} \alpha_n^{-1} A_n^* A_n - \left|\sum_{n=1}^{N} A_n\right|^2\right\|^{\frac{p}{2}} \left\|\sum_{n=1}^{N} \alpha_n^{-1} B_n^* X^* X B_n - \left|X \sum_{n=1}^{N} B_n\right|^2\right\|_{\Phi^{(\frac{p}{2})}}^{\frac{p}{2}}. \quad (8)$$

Специјално, за Шатенове норме $\|\cdot\|_p$ при $p \geqslant 2$, добијена неједнакост (8) се додатно упрошћава на начин приказан у неједнакостима (4.22)-(4.24) теореме 4.5, што између осталог омогућава утврђивање под којим условима се достиже једнакост у добијеним неједнакостима.

Помоћу идентитета (7) изведена је и уопштена Грис-Ландауова норма неједнакост за оператор монотоне функције у теореми 4.4.

Теорема (JKЛММ (CAOT 2018))

Нека је $f\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ таква да је $f(0)=0$ и функција $t \mapsto f(\sqrt{t})$ је конвексна. Тада је под условима Леме 4.1

$$\begin{aligned}
&\Bigg\| f\left(\left|\sum_{n=1}^{N} \alpha_n^{-1} A_n^* X B_n - \left(\sum_{n=1}^{N} A_n^*\right) X \left(\sum_{n=1}^{N} B_n\right)\right|\right) \\
&+ \sum_{1\leqslant m<n\leqslant N} f\Bigg(\alpha_m^{\frac{1}{2}}\alpha_n^{\frac{1}{2}}\Bigg|(\alpha_m^{-1}A_m - \alpha_n^{-1}A_n)\left(cI + \left(c^2 I - \sum_{n=1}^{N}\alpha_n^{-1}A_n^*A_n + \left|\sum_{n=1}^{N} A_n\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} \\
&\times \left(\sum_{n=1}^{N} \alpha_n^{-1} A_n^* X B_n - \left(\sum_{n=1}^{N} A_n^*\right) X \left(\sum_{n=1}^{N} B_n\right)\right) - cX(\alpha_m^{-1}B_m - \alpha_n^{-1}B_n)\Bigg|\Bigg)\Bigg\|_{\Phi} \\
&\leqslant \left\| f\left(c^2\left(\sum_{n=1}^{N}\alpha_n^{-1}B_n^* X^* X B_n - \left(\sum_{n=1}^{N} B_n^*\right) X^* X \left(\sum_{n=1}^{N} B_n\right)\right)\right)\right\|_{\Phi}. \qquad (9)
\end{aligned}$$

У овој глави приказана је и операторна верзија Грис-Ландауове неједнакости за трансформере типа унутрашњег производа.

Теорема (Лазаревић (Filomat 2019))

Нека је μ вероватносна мера на Ω, нека су о.в. функције $A^*, B \in L^2_G(\Omega, \mu, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$, $f, g \in \mathcal{H}$, $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ и $\eta \in [0,1]$. Тада је

$$\left|\int_\Omega A_t X B_t \, d\mu(t) - \int_\Omega A_t \, d\mu(t) X \int_\Omega B_t \, d\mu(t)\right|^{2\eta} \leqslant$$

$$\left\|\int_\Omega A_t A_t^* \, d\mu(t) - \left|\int_\Omega A_t^* \, d\mu(t)\right|^2\right\|^\eta \left(\int_\Omega B_t^* X^* X B_t \, d\mu(t) - \left|X \int_\Omega B_t \, d\mu(t)\right|^2\right)^\eta$$

из рада [Laz19], помоћу које су изведене и одговарајуће норма неједнакости за Хилберт-Шмитове норме и друге p-модификоване норме у последици 4.13, теоремама 4.15, 4.16 и 4.19.

Под условима теореме 4.10 додатно је показано у теореми 4.11

Теорема (Лазаревић (Filomat 2019))

Нека су испуњени услови Теореме 4.13, нека су $\{A_t\}_{t\in\Omega}$ и $\{B_t\}_{t\in\Omega}$ фамилије самоадјунгованих оператора које задовољавају услов $\varphi \leqslant A_t \leqslant \Phi$ за неке самоадјунговане операторе $\varphi, \Phi \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ који комутирају са A_t за свако $t \in \Omega$ и за које важи $\varphi\Phi = \Phi\varphi$, као и $\gamma \leqslant B_t \leqslant \Gamma$ за неке самоадјунговане $\gamma, \Gamma \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ који комутирају са B_t за свако $t \in \Omega$ и за које је $\gamma\Gamma = \Gamma\gamma$. Тада важи

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_\Omega A_t B_t \, d\mu(t) - \int_\Omega A_t \, d\mu(t) \int_\Omega B_t \, d\mu(t)\right|^{2\eta} \\
&\leqslant \left\|\int_\Omega A_t^2 \, d\mu(t) - \left|\int_\Omega A_t \, d\mu(t)\right|^2\right\|^\eta \left(\int_\Omega B_t^2 \, d\mu(t) - \left|\int_\Omega B_t \, d\mu(t)\right|^2\right)^\eta \\
&\leqslant \left\|\left(\Phi - \int_\Omega A_t \, d\mu(t)\right)\left(\int_\Omega A_t \, d\mu(t) - \varphi\right)\right\|^\eta \left(\Gamma - \int_\Omega B_t \, d\mu(t)\right)^\eta \left(\int_\Omega B_t \, d\mu(t) - \gamma\right)^\eta \\
&\leqslant \frac{1}{4^{2\eta}} \|\Phi - \varphi\|^{2\eta} (\Gamma - \gamma)^{2\eta}.
\end{aligned}
$$

У глави 5 разматрани су резултати из рада [JLM20], у коме су приказане норма неједнакости за уопштене функцијске деривације:

- поткласе функција из диск алгебре $\mathbf{A}(\mathbb{D})$, евалуираних у различитим класама (не обавезно нормалних) контрактивних оператора;
- оператор монотоних функција за хипонормалне, кохипонормалне, акретивне операторе и операторе које имају строго контрактиван реалан део.

Тако се у првом случају разматрају $A, B \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ који су контракције, што је показано у делу (a1) теореме 5.1

Теорема (Јоцић, Лазаревић, Милошевић (LAA 2020))

Нека су $A, B \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ контракције, $p \geqslant 2, \Phi$ с.н. функција, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ апсолутно конвергентан ред комплексних бројева за који је $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| \leqslant 1$ и нека је $f(z) \stackrel{\text{деф}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ за $|z| \leqslant 1$. Ако за неко $X \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$:
(a1) $AX - XB \in \mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H})$ и A, B су нормални оператори, тада и оператор $\sqrt{I - A^*A}\,(f(A)X - Xf(B))\sqrt{I - BB^*} \in \mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H})$, при чему је

$$
\begin{aligned}
&\left\|\sqrt{I - A^*A}(f(A)X - Xf(B))\sqrt{I - BB^*}\right\|_\Phi \\
&\qquad \leqslant \left\|\sqrt{I - f(A)^*f(A)}\,(AX - XB)\sqrt{I - f(B)f(B)^*}\right\|_\Phi . \qquad (10)
\end{aligned}
$$

Алтернативно, уколико је додатно $AX - XB \in \mathfrak{C}_{\Phi^{(p)*}}(\mathcal{H})$ и (бар) један од оператора A или B је нормалан, тада $\sqrt{I - A^*A}\,(f(A)X - Xf(B))$ $\sqrt{I - BB^*} \in \mathfrak{C}_{\Phi^{(p)*}}(\mathcal{H})$ и (10) важи за $\Phi^{(p)*}$ уместо за Φ. Уколико пак $AX - XB \in \mathfrak{C}_1(\mathcal{H})$, тада (10) важи када се норма $\|\cdot\|_\Phi$ замени нуклеарном нормом $\|\cdot\|_1$.

Илустративни примери деривационих неједнакости за нуклеарне норме и конкретне функције диск алгебре $\mathbf{A}(\mathbb{D})$ претходног типа приказани су у последици 5.4

Последица (Јоцић, Лазаревић, Милошевић (LAA 2020))

Ако су $A, B \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ контракције и $n \in \mathbb{N}$, тада је

$$\begin{aligned} &\|\sqrt{I - A^*A}(e^A X - X e^B)\sqrt{I - BB^*}\|_1 \\ &\qquad \leqslant \tfrac{1}{e}\|\sqrt{e^2 I - e^{A^*}e^A}\,(AX - XB)\sqrt{e^2 I - e^B e^{B^*}}\|_1, \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} &\|\sqrt{I - A^*A}\Big(eX - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n X B^n}{n!}\Big)\sqrt{I - BB^*}\|_1 \\ &\qquad \leqslant \tfrac{1}{e}\|\sqrt{e^2 I - e^{A^*}e^A}\,(X - AXB)\sqrt{e^2 I - e^B e^{B^*}}\|_1, \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} &\Big\|\sqrt{I - A^*A}((\arcsin A)X - X\arcsin B)\sqrt{I - BB^*}\Big\|_1 \\ &\qquad \leqslant \tfrac{2}{\pi}\Big\|\sqrt{\tfrac{\pi^2}{4}I - |\arcsin A|^2}(AX - XB)\sqrt{\tfrac{\pi^2}{4}I - |\arcsin B^*|^2}\Big\|_1, \end{aligned} \tag{13}$$

Последица (Јоцић, Лазаревић, Милошевић (LAA 2020))

$$\left\|\sqrt{I-A^*A}\Big(\tfrac{\pi}{2}X-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)}A^{2n+1}XB^{2n+1}\Big)\sqrt{I-BB^*}\right\|_1$$

$$\leqslant \tfrac{2}{\pi}\left\|\sqrt{\tfrac{\pi^2}{4}I-|\arcsin A|^2}\,(X-AXB)\sqrt{\tfrac{\pi^2}{4}I-|\arcsin B^*|^2}\right\|_1, \quad (14)$$

$$\left\|\sqrt{I-A^*A}\Big((I-A)\exp\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{A^k}{k}\Big)X-X(I-B)\exp\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{B^k}{k}\Big)\Big)\sqrt{I-BB^*}\right\|_1\leqslant$$

$$\left\|\sqrt{I-\Big|(I-A)\exp\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{A^k}{k}\Big)\Big|^2}(AX-XB)\sqrt{I-\Big|(I-B^*)\exp\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{B^{*k}}{k}\Big)\Big|^2}\right\|_1, \quad (15)$$

Последица (Јоцић, Лазаревић, Милошевић (LAA 2020))

$$\left\|\sqrt{I-A^*A}\,(AX+(I-A)\log(I-A)X-XB-X(I-B)\log(I-B))\sqrt{I-BB^*}\right\|_1$$
$$\leqslant \left\|\sqrt{I-\left|A+(I-A)\log(I-A)\right|^2}\,(AX-XB)\right.$$
$$\left.\sqrt{I-\left|B^*+(I-B^*)\log(I-B^*)\right|^2}\right\|_1. \qquad (16)$$

кад год $AX-XB \in \mathfrak{C}_1(\mathcal{H})$ у (11), (13), (15) и (16), као и кад је $X-AXB \in \mathfrak{C}_1(\mathcal{H})$ у (12) и (14).

У другом случају разматране су оператор монотоне функције на $(-1,1)$ и $[0,+\infty)$, које редом представљају поткласе Пикових функција $\mathcal{P}(-1,1)$ и $\mathcal{P}[0,+\infty)$. Тако је у делу (г) теореме 5.6 показано да важи следећа операторна варијанта теореме о средњој вредности за оператор монотоне функције.

Теорема (Јоцић, Лазаревић, Милошевић (LAA 2020))

Нека је Φ с.н. функција, $p \geqslant 2$ и $A, B, X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, такви да уколико је $\varphi \in \mathcal{P}(-1,1)$ тада A и B имају строго контрактивни реални део, а уколико је $\varphi \in \mathcal{P}[0,+\infty)$ неконстантна функција тада су A и B строго акретивни. Ако су додатно и A и B нормални, такви да $AX - XB \in \mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H})$, тада је

$$\|\varphi(A)X - X\varphi(B)\|_\Phi \leqslant \left\| \sqrt{\varphi'\left(\frac{A^* + A}{2}\right)}(AX - XB)\sqrt{\varphi'\left(\frac{B + B^*}{2}\right)} \right\|_\Phi, \quad (17)$$

Теорема (Јоцић, Лазаревић, Милошевић (LAA 2020))

$$\left\|\sqrt{\frac{A^*+A}{2}}(\varphi(A)X-X\varphi(B))\sqrt{\frac{B+B^*}{2}}\right\|_\Phi \leqslant$$

$$\left\|\sqrt{\frac{A^*+A}{2}\varphi'\left(\frac{A^*+A}{2}\right)}(AX-XB)\sqrt{\frac{B+B^*}{2}\varphi'\left(\frac{B+B^*}{2}\right)}\right\|_\Phi \leqslant$$

$$\left\|\sqrt{\varphi\left(\frac{A^*+A}{2}\right)}(AX-XB)\sqrt{\varphi\left(\frac{B+B^*}{2}\right)}\right\|_\Phi \quad \text{ако је } \varphi(0)=0,$$

$$\left\|\varphi'\left(\frac{A^*+A}{2}\right)^{-1/2}(\varphi(A)X-X\varphi(B))\varphi'\left(\frac{B+B^*}{2}\right)^{-1/2}\right\|_\Phi \leqslant \|AX-XB\|_\Phi. \tag{18}$$

Неједнакост (17) (односно (18)) представља значајно уопштење неједнакости (69) (односно (68)) из [J05, th. 4.4] за строго позитивно дефинитне оператора A и B на све строго акретивне нормалне операторе. У истој теореми 5.6 наведене су и додатне операторне варијанте теореме средње вредности за оператор монотоне функције за Q и Q^* норме, када се услов нормалности за оба оператора A и B може редуковати на нормалност једног од њих и адекватну хипонормалност или кохипонормалност другог од њих.

Последица (Јоцић, Лазаревић, Милошевић (LAA 2020))

Нека је Φ с.н. функција и нека су $A, B \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ нормални оператори такви да $AX - XB \in \mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H})$ за неко $X \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$.

(a) Ако су A и B акретивни оператори, тада је за све $\theta \in [0, 1]$

$$\left\| \left(\frac{A^* + A}{2}\right)^{\frac{1-\theta}{2}} (A^\theta X - XB^\theta) \left(\frac{B + B^*}{2}\right)^{\frac{1-\theta}{2}} \right\|_\Phi \leqslant \theta \|AX - XB\|_\Phi, \tag{19}$$

$$\left\|\sqrt{A^* + A}(\log(A)X - X\log(B))\sqrt{B + B^*}\right\|_\Phi \leqslant 2\|AX - XB\|_\Phi. \tag{20}$$

Додатно, ако су A и B строго акретивни оператори, тада је

$$\left\|A\big(\log(I + A)\big)^{-1}X - XB\big(\log(I + B)\big)^{-1}\right\|_\Phi \leqslant$$

$$\Bigg\|\sqrt{\log\left(I + \frac{A^* + A}{2}\right) - \frac{A^* + A}{2}\left(I + \frac{A^* + A}{2}\right)^{-1}} \left(\log\left(I + \frac{A^* + A}{2}\right)\right)^{-1} (AX - XB)$$

$$\times\sqrt{\log\left(I + \frac{B + B^*}{2}\right) - \frac{B + B^*}{2}\left(I + \frac{B + B^*}{2}\right)^{-1}} \left(\log\left(I + \frac{B + B^*}{2}\right)\right)^{-1} \Bigg\|_\Phi.$$

Последица (Јоцић, Лазаревић, Милошевић (LAA 2020))

(б) Ако A и B имају строго контрактивне реалне делове и $0 \leqslant \alpha, \beta \leqslant 1$, тада

$$\frac{1}{2}\left\|\sqrt{I-\left|\frac{A^*+A}{2}\right|^2}\left(\log\frac{I+A}{I-A}X - X\log\frac{I+B}{I-B}\right)\sqrt{I-\left|\frac{B+B^*}{2}\right|^2}\right\|_\Phi \leqslant \|AX-XB\|_\Phi,$$

$$\frac{\pi}{2}\left\|\cos\frac{A^*+A}{\pi}\left(\tan\frac{2A}{\pi}X - X\tan\frac{2B}{\pi}\right)\cos\frac{B+B^*}{\pi}\right\|_\Phi \leqslant \|AX-XB\|_\Phi, \tag{21}$$

$$\begin{aligned}&\|((I+A)^\alpha-(I-A)^\beta)X - X((I+B)^\alpha-(I-B)^\beta)\|_\Phi \leqslant \\ &\left\|\left(\alpha\left(I+\frac{A^*+A}{2}\right)^{\alpha-1}+\beta\left(I-\frac{A^*+A}{2}\right)^{\beta-1}\right)^{1/2}(AX-XB)\right. \\ &\quad\left.\times\left(\alpha\left(I+\frac{B+B^*}{2}\right)^{\alpha-1}+\beta\left(I-\frac{B+B^*}{2}\right)^{\beta-1}\right)^{1/2}\right\|_\Phi.\end{aligned}$$

У последици 5.8 теорема 5.6 примењена је на најважније примере оператор монотоних функција, чиме су (између осталог) неједнакошћу (19) постигнута уопштења Хајнцове неједнакости за позитивне операторе, неједнакошћу (20) се уопштава геометријско-логаритамска неједнакост за строго позитивне операторе, док неједнакост (21) ефективно уопштава познату неједнакост $\|(\sin H)X\cos K - (\cos H)X\sin K\|_\Phi \leqslant \|HX - XK\|_\Phi$ за самоадјунговане операторе H и K из [K98, th. 5] и [Lar08, rem. 25].

Теорема 5.6 омогућила је и добијање операторне верзије теореме о средњим вредностима за функције инверзне оператор монотоним функцијама, како је то показано у последици 5.10.

Последица (Јоцић, Лазаревић, Милошевић (LAA 2020))

Нека је $p \geqslant 1, \Phi$ с.н. функција, нека је g инверзна функција неке неконстантне о.м. функције на $[0,+\infty)$ и нека су $C, D, X \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$, при чему су C и D нормални оператори. Ако су $g(C)$ и $g(D)$ строго акретивни оператори такви да $g(C)X - Xg(D) \in \mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H})$, тада је

$$\left\|\sqrt{g'\left(g^{-1}\left(\frac{g(C)^*+g(C)}{2}\right)\right)}(CX-XD)\sqrt{g'\left(g^{-1}\left(\frac{g(D)+g(D)^*}{2}\right)\right)}\right\|_\Phi \leqslant \left\|g(C)X-Xg(D)\right\|_\Phi.$$

Специјално, ако су C^p и D^p строго акретивни оператори за које је $C^pX - XD^p \in \mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H})$, тада је

$$p\left\|\left(\frac{C^{*p}+C^p}{2}\right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}(CX-XD)\left(\frac{D^p+D^{*p}}{2}\right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}}\right\|_\Phi \leqslant \left\|C^pX-XD^p\right\|_\Phi.$$

Последица (Јоцић, Лазаревић, Милошевић (LAA 2020))

Специјално, ако су $C, D \geqslant 0$, тада је

$$\left\|\sqrt{g'(C)}(CX - XD)\sqrt{g'(D)}\right\|_\Phi \leqslant \left\|g(C)X - Xg(D)\right\|_\Phi,$$

$$\left\|\sqrt{C(I+C)^{-1} + \log(I+C)}(CX - XD)\sqrt{D(I+D)^{-1} + \log(I+D)}\right\|_\Phi$$

$$\leqslant \left\|C\log(I+C)X - XD\log(I+D)\right\|_\Phi.$$

[J05] D.R. Jocić, *Cauchy-Schwarz norm inequalities for weak*-integrals of operator valued functions*, J. Funct. Anal. **218** (2005), 318-346.

[JKL19] D. R. Jocić, Đ. Krtinić, M. Lazarević, *A note on the paper "Norm inequalities in operator ideals" [J. Funct. Anal. 255 (11) (2008), 3208-3228] by G. Larotonda*, J. Funct. Anal. **277** (2019), 641-642.

[JKL20] D. R. Jocić, Đ. Krtinić, M. Lazarević, *Cauchy–Schwarz inequalities for inner product type transformers in Q* norm ideals of compact operators*, Positivity **24** (2020), 933-956.

[JKLMM] D. R. Jocić, Đ. Krtinić, M. Lazarević, P. Melentijević, S. Milošević, *Refinements of operator Landau and Grüss inequalities for elementary operators on ideals associated to p-modified unitarily invariant norms*, Complex Anal. Oper. Theory **12** (2018), 195-205.

[JLM18] D. R. Jocić, M. Lazarević, S. Milošević, *Norm inequalities for a class of elementary operators generated by analytic functions with non-negative Taylor coefficients in ideals of compact operators related to p-modified unitarily invariant norms*, Linear Algebra Appl. **540** (2018), 60-83.

[JLM20] D. R. Jocić, M. Lazarević, S. Milošević, *Inequalities for generalized derivations of operator monotone functions in norm ideals of compact operators*, Linear Algebra Appl. **586** (2020), 43-63.

[JMĐ] D.R. Jocić, S. Milošević, V. Đurić, *Norm inequalities for elementary operators and other inner product type integral transformers with the spectra contained in the unit disc*, Filomat **31** (2017), 197-206.

[K98] H. Kosaki, *Arithmetic Geometric Mean and Related Inequalities for Operators*, J. Funct. Anal. **156** (1998), 429-451.

[Laz19] M. Lazarević, *Grüss-Landau inequalities for elementary operators and inner product type transformers in Q and Q^* norm ideals of compact operators*, Filomat **33** (2019), 2447-2455.

[Lar08] G. Larotonda, *Norm inequalities in operator ideals*, J. Funct. Anal. **255** (2008), 3208-3228.

Хвала на пажњи!