Пријемни испит за упис на Математички факултет, 26.06.2019.

Скице решења задатака

1. Тачна су тврђења (III) и (IV). Одговор **C)**.

2. За $x = \sqrt{3}$ и $y = 2$ је $2x^2 - 3y = 0$, па је именилац датог разломка једнак 0, те дати израз није дефинисан. [У овом случају је и бројилац једнак нули, али то не мења претходни закључак.] Одговор **E)**.

3. Елиминацијом променљиве x из датог система добија се једначина $(a+4)(a-2)y = -3(a+4)$, Следи да за $a \notin \{-4, 2\}$ систем има јединствено решење, за $a = 2$ систем нема решења, а за $a = -4$ има бесконачно много решења. Одговор **D)**.

4. Из прве једначине је $x_1 + x_2 = a$ и $x_1x_2 = 4$, а из друге $x_1 + 2x_2 = 9$ и $x_1 \cdot 2x_2 = b$. Из $x_1x_2 = 4$, $x_1 + 2x_2 = 9$ и $x_1 < x_2$ следи да је $x_1 = 1$ и $x_2 = 4$, па је $a = x_1 + x_2 = 5$ и $b = 1 \cdot 8 = 8$, односно $abx_1x_2 = 160$. Одговор **D)**.

5. Теме дате параболе је тачка $\left(\frac{7}{2k}, \frac{16k^2-49}{4k}\right)$, па да би припадала другом квадранту, мора бити $\frac{7}{2k} < 0$ и $\frac{16k^2-49}{4k} > 0$, одакле је $k < 0$ и $16k^2 < 49$, тј. $k \in \left(-\frac{7}{4}, 0\right)$. Одговор **A)**.

6. Како је $2^x + 3 \cdot 2^y = 2$, из друге једначине следи $1 = 4^x - 9 \cdot 4^y = (2^x + 3 \cdot 2^y)(2^x - 3 \cdot 2^y) = 2(2^x - 3 \cdot 2^y)$. Дакле, важи $2^x + 3 \cdot 2^y = 2$ и $2^x - 3 \cdot 2^y = \frac{1}{2}$, па је $2^x = \frac{5}{4}$ и $2^y = \frac{1}{4}$, односно $x = \log_2 \frac{5}{4} = \log_2 5 - 2$ и $y = -2$, па је $x - y = \log_2 5$. Одговор **B)**.

7. $\log_2(\log_{\sqrt{2}} 9 \cdot \log_{\sqrt{3}} 2) = \log_2(\log_{2^{1/2}} 3^2 \cdot \log_{3^{1/2}} 2) = \log_2(4\log_2 3 \cdot 2\log_3 2) = \log_2 8 = 3$. Одговор **B)**.

8. Тетива једнака полупречнику круга је страница правилног шестоугла уписаног у тај круг. Тражени однос је $\left(\frac{5}{6}\pi + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) : \left(\frac{1}{6}\pi - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = (10\pi + 3\sqrt{3}) : (2\pi - 3\sqrt{3})$. Одговор **C)**.

9. Површине пресека пирамиде (са равни која је паралелна основи) и основе односе се као квадрати њихових растојања од темена пирамиде, па је $45 : 180 = (6 : H)^2$, где је H висина пирамиде. Одатле се добија да је $H = 12\,\mathrm{cm}$ и $V = \frac{1}{3} \cdot 12 \cdot 180\,\mathrm{cm}^3 = 720\,\mathrm{cm}^3$. Одговор **C)**.

10. Из једначине следи да је $2\cos x + 2 = k\pi$ за неко $k \in \mathbb{Z}$. Ако је $k \geqslant 2$, следи $\cos x = \frac{k\pi - 2}{2} > \frac{2 \cdot 2 - 2}{2} = 1$, па у овом случају нема решења. Ако је $k \leqslant -1$, следи $\cos x = \frac{k\pi - 2}{2} < -1$, па ни у овом случају нема решења. За $k = 0$ једначина постаје $\cos x = -1$ и има једно решење на $[0, 2\pi]$. За $k = 1$, једначина постаје $\cos x = \frac{\pi - 2}{2} \in (-1, 1)$ и има два решења на $[0, 2\pi]$. Укупно, једначина има 3 решења на датом интервалу. Одговор **E)**.

11. За $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, важи $\sin x \neq 0$ и

$$\frac{\sin 4x}{\sin x} = \frac{2\sin 2x \cos 2x}{\sin x} = \frac{2 \cdot 2\sin x \cos x \cdot (2\cos^2 x - 1)}{\sin x} = 4\cos x \cdot (2\cos^2 x - 1),$$

а како за такве x вредност $\cos x$ може бити сваки број из $(-1, 1)$, следи да за $t \in (-1, 1)$ важи $f(t) = 4t(2t^2 - 1)$. Одговор **A)**.

12. Како је S средиште дужи AC, следи да је $C(11, 7)$. E је средиште CD, па је $D(-3, -3)$, S је средиште BD, па је $B(15, 11)$. Дакле, $x_1 = 15$, $y_1 = 11$, $x_2 = -3$ и $y_2 = -3$, па је $x_1 + 2y_1 + 3x_2 + 4y_2 = 16$. Одговор **D)**.

13. Парабола и права имају бар једну заједничку тачку у случају када једначина $x^2 - 2x + 1 = kx$ има бар једно реално решење, тј. ако и само ако је $D = (2+k)^2 - 4 = k(k+4) \geqslant 0$. Одговор **C)**.

14. Директно се рачунају следећи чланови датог низа: $a_3 = 5$, $a_4 = \frac{1}{3}$, $a_5 = \frac{1}{15}$, $a_6 = \frac{1}{5}$, $a_7 = 3$, $a_8 = 15$. Дакле, $a_7 = a_1$ и $a_8 = a_2$, па индукцијом следи да је $a_{n+6} = a_n$ за $n \in \mathbb{N}$ (низ је периодичан с периодом 6). Како 2019 даје остатак 3 при дељењу са 6, следи да је $a_{2019} = a_3 = 5$. Одговор **B)**.

15. Ако је d разлика датог аритметичког низа, важи $a_n = a_1 + (n-1)d$ за $n \in \mathbb{N}$, па је $2a_4 = 2a_1 + 6d = 22$, одакле је $a_4 = 11$ и $a_3 a_4 = 88$, па је $11a_3 = 88$, тј. $a_3 = 8$. Следи да је $d = a_4 - a_3 = 3$, па је $a_1 = 2$, $a_n = 2 + 3(n-1)$ и $a_7 = 20$. Одговор **D)**.

16. Ако је $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$, изједначвањем реалних и имагинарних делова леве и десне стране следи $\sqrt{x^2+y^2} + x = 2$ и $y = 1$, па је $\sqrt{x^2+1} = 2 - x$. Ако је $x > 2$, стране последње једначине су различитих знакова, па она нема решења. Ако је $x \leqslant 2$, та једначина је еквивалентна са $x^2 + 1 = 4 - 4x + x^2$, одакле је $x = \dfrac{3}{4}$. Одговор **B)**.

17. Остатак при дељењу полинома $p(x)$ са $x+1$ је $p(-1)$, дакле, у овом случају је $(3 \cdot (-1)^2 + 4 \cdot (-1) - 5)(-a-2) = 36$, одакле је $a = 4$. Одговор **E)**.

18. За $x \notin \{-2, -\frac{5}{3}\}$ важи $f(f(x)) = \dfrac{2x+3}{3x+5}$, па се траже решења једначине $\dfrac{2x+3}{3x+5} = -x-1$. За $x \notin \{-2, -\frac{5}{3}\}$ једначина је еквивалентна са $2x+3 = -(x+1)(3x+5)$, односно $3x^2 + 10x + 8 = 0$, тј. са $(x+2)(3x+4) = 0$. На основу претходног, -2 није решење полазне једначине, а $-\dfrac{4}{3}$ јесте. Одговор **C)**.

19. За цифру d постоје 4 могућности (1, 5, 7 и 9), за цифру a 6 могућности (искључене су 0, 2, 3 и изабрана вредност за d), а за цифру c преосталих 6 могућности, што је укупно $4 \cdot 6 \cdot 6 = 144$ могућности. Одговор **D)**.

20. $\dbinom{34}{32} + \dbinom{33}{31} = \dbinom{34}{2} + \dbinom{33}{2} = \dfrac{34 \cdot 33}{2} + \dfrac{33 \cdot 32}{2} = 33^2 = \dbinom{33}{32}^2$ и притом је ова вредност различита од остале четири понуђене вредности. Одговор **E)**.