

Наставно - научном већу
Математичког факултета
Универзитета у Београду

Одлуком Наставно-научног већа, донесеном на 392. седници, 15.04.2022. године именовани смо за чланове Комисије за оцену докторске дисертације „Нови приступи у решавању оптимизационог проблема Римске доминације на графовима“, кандидаткиње Марије Ивановић. Након прегледа дисертације, Комисија подноси Наставно-научном већу Математичког факултета Универзитета у Београду следећи извештај.

1. Основни подаци о кандидату и дисертацији

Основни подаци о кандидату

Марија Ивановић је рођена 6.11.1982. године у Пожаревцу. Основну школу „Јован Цвијић“ завршила је у Костолцу, а Гимназију „Јован Шербановић“ у Пожаревцу. Дипломирала је 2007. године, са средњом оценом 8.37 на Основним академским студијама на Математичком факултету Универзитета у Београду, смер Нумеричка математика и оптимизација. Мастер студије на Математичком факултету Универзитета у Београду завршила је 2012. године одбравивши мастер тезу под насловом „Теорија игара – Игре тражења и сусретања“. На докторске студије на Катедри за нумеричку математику и оптимизацију Математичког факултета Универзитета у Београду први пут се уписала школске 2009. године. Према ранијим важећим законским прописима имала је пријављену тему докторске дисертације под насловом „Оптимизациони проблеми римске доминације на графовима“ на коју је Универзитет дао сагласност број 61206-2133/2-15 од 18.05.2015. године. Други пут се на докторске студије уписала 2018. године. По одлуци Наставно-научног већа Математичког факултета на седници одржаној 13.09.2019. године а на основу усвојеног извештаја комисије за оцену научне заснованости прихваћена је тема докторске под називом „Нови приступи у решавању оптимизационог проблема римске доминације на графовима“. На Математичком факултету Универзитета у Београду била је запослена у периоду од 2008-2021. године, где је држала вежбе на Катедри за нумеричку математику и оптимизацију. Од 2021. године запослена је на Институту за физику у Београду као истраживач-приправник. Једна је од ауторки збирке „Збирка задатака из Увода у нумеричку математику“ издате од стране Математичког факултета.

Наслов дисертације: Нови приступи у решавању оптимизационог проблема Римске доминације на графовима.

Обим дисертације и библиографија: Дисертација се састоји из 171 стране и библиографије. Основне делове дисертације чине увод, преглед релевантне литературе о проблемима римске доминације, математичке формулације проблема римске доминације и неких његових модификација и алгоритми за решавање проблема римске и слабе римске доминације на графу. Литература обухвата 93 рада.

2. Предмет и циљ дисертације

Тема дисертације припада ужој научној области Оптимизација, а у оквиру ње Дискретној оптимизацији.

Проблем доминације на графу проучава се још од 1950. године и представља један од популарнијих проблема XX века, док је проблем Римске доминације дефинисан тек 1999. године инспирисан проблемом одбране Римског царства. Популарност и веће научно интересовање изазвао је рад Јан Стјуарта *Одбранити Римско Царство!*. Проблем се у војној терминологији може представити на следећи начин: свака провинција заштићена је од напада уколико се у њој налази најмање једна војна формација, а проблем римске доминације представља проблем организовања војних формација тако да све римске провинције буду заштићене од потенцијалних напада. При том, ако одређена провинција поседује две војне формације, једна од њих ће се сматрати мобилном јединицом способном да пређе у суседну провинцију и одбрани је од евентуалних напада или унутрашњих побуна. На овај начин се провинције које не поседују сопствену војску могу сматрати безбедним уколико су директним путем повезане са провинцијом која поседује две формације. Јасно је да се ово природно може претворити у граф где су провинције чворови, гране постоје уколико постоји копнена или поморска граница између њих, а број војних јединица су тежине чворова.

Од дефинисања самог проблема до данас настало је више модификација и варијанти основног проблема римске доминације. У овој тези, поред основног проблема римске доминације, проучавана су још два његова уопштења: Проблем ограничене римске доминације и Проблем слабе римске доминације. С тим у вези, за постојеће математичке моделе основног и проблема слабе римске доминације у дисертацији су предложена побољшања, док је за проблем ограничене римске доминације представљен по први пут математички модел. Додатно, за проблем слабе римске доминације представљен је нови алгоритам који овај проблем решава оптимално на графовима који имају блоковску форму. Пошто проблем римске доминације спада у NP тешке проблеме, поред развијених модела и поменутог алгоритма, развијени су и алгоритми засновани на Методи променљивих околина који основни и проблем слабе римске доминације решавају хеуристички.

Резултати добијени применом развијених алгоритама упоређени су са резултатима из литературе и резултатима добијеним применом Gurobi и/или CPLEX решавача за познате и нове математичке моделе.

Циљ докторске дисертације је да се постојећи математички модели унапреде, односно да се развију модели за оне проблеме за које до тог момента у литератури нису постојали други развијени математички модели. Циљ је био и да се развију различити алгоритми за решавање одређених проблема римске доминације.

3. Основне хипотезе од којих се полазило у истраживању

Имајући у виду да се проблем Римске доминације може применити и у области телекомуникација (покривеност сигналом), сигурностних мрежа, и др., ефикасно решавање самог проблема, а нарочито проблема већих димензија је од великог значаја. За основни и проблем слабе римске доминације у литератури постоје модели мешовитог целобројног програмирања, али за проблем ограничене римске доминације ни један такав модел није био познат. Пошто је доказано да су ови проблеми NP- тешки, велики број ограничења у постојећим математичким формулацијама отежавао је решавање ових проблема егзактним методама чак и за проблеме мањих димензија. Ипак, у литератури постоји рад у коме је за одређену врсту графова (блок графови) представљен алгоритам којим се основни проблем римске доминације решава егзактно, и још један рад у коме се користи хеуристика (генетски алгоритам) за решавање истог проблема.

4. Кратак опис садржаја дисертације

Главни део дисертације састоји се из четири главе.

У првој глави дата су уводна разматрања, основни појмови и дефиниције који се односе на проблем линеарног програмирања, NP-тешке проблеме и графове. Дате су дефиниције проблема доминације, римске, ограничене и слабе римске доминације.

Друга глава садржи преглед резултата из релевантне литературе о проблемима римске доминације, с тим да су засебно разматрани Проблем римске доминације, Проблем ограничене римске доминације и Проблем слабе римске доминације. Литература која се тиче проблема римске доминације изузетно је обимна. Стога су посебно изложене теореме који се тичу особина проблема римске доминације, теореме у којима су изложене тачне вредности проблема римске доминације за одређене графове, и радови којима су изложене класе графова са одређеним особинама. На сличан начин приказани су резултати

из литературе који се тичу проблема ограничене и слабе римске доминације. На крају главе дат је преглед алгоритама за решавање проблема римске доминације и неких његових модификација.

У трећој глави приказане су математичке формулације проблема римске доминације, ограничене и слабе римске доминације. Тачније, за проблем римске доминације прво су изложене две математичке формулације из литературе означене као RD1 и RD2 а потом су предложене једна модификација RD1 формулације и две модификације RD2 формулације (са доказом ваљаности) које су развијене као део истраживања објављеног у самосталном раду *Marija Ivanović, „A mixed integer linear programming formulation for roman domination problem“, Publications de l' Mathematique, 99(113):51-58,2016.* За проблем ограничене римске доминације изложена је по први пут математичка формулација мешовитог целобројног програмирања (означена као RRD1) уз доказ да приказана формулација заиста одговара посматраном проблему. Резултати овог истраживања објављени су у самосталном раду *Marija Ivanović, „A mixed integer linear programming formulation for restrained roman domination problem“, Theory of Applications of Mathematics & Computer Science, 5(2):110-115, 2015.* У литератури се спомиње једна математичка формулација проблема слабе римске доминације (означена као WRD_{BVV}), међутим представљена формулација не одговара у потпуности проблему римске доминације. Заправо, уочено је да је при запису предложене формулације највероватније направљена штампарска грешка. Стога је прво предложена формулација (означена као WRD1) у којој је та грешка исправљена, затим је дат доказ да исправљена формулација заиста одговара посматраном проблему, а потом је изложена нова математичка формулација проблема слабе римске доминације означена као WRD2 уз доказ да је она еквивалентна формулацији WRD1. Резултати истраживања који се тичу проблема слабе римске доминације објављени су у још једном самосталном раду *Marija Ivanović, „Improved integer linear programming formulation for weak roman domination problem“, Soft Computing, <https://doi.org/10.1007/s00500-017-2706-4>, Print ISSN 1432-7643, Online ISSN 1433-7479:1-11, 2017.* Трећа глава заокружена је детаљним поређењима брзина решавања математичких формулација помоћу комерцијалних софтвера CPLEX и Gurobi на инстанцама различитих типова и димензија.

Алгоритми за решавање проблема римске и слабе римске доминације на графу изложени су у оквиру четврте главе. Прво је изложена егзактна метода из литературе за решавање проблема слабе римске доминације на блок-графовима уз неопходне појмове и нотације, а будући да изложени алгоритам не даје увек оптимално решење, потом је представљен и модификовани алгоритам за решавање проблема слабе римске доминације. Модификовани алгоритам за решавање проблема слабе римске доминације на блок-графовима резултат је заједничког рада (*Marija Ivanović, Dragan Urošević*) и представљен на XIII *Balkan Conference on Operational Research Proceedings*, page 25, FON 2018, под насловом “A new linear-time algorithm for computing the weak roman domination number of a block graph”. Оба алгоритма тестирана су на истом скупу инстанци, а резултати њихових поређења приказани након описа. У наставку четврте главе приказана је

недетерминистичка Метода промениљивих околина за решавање проблема римске и слабе римске доминације. У још једном заједничком раду (*Marija Ivanović, Dragan Urošević*) „*Variable neighborhood search approach for solving roman and weak roman domination problems on graphs*“, *Computing & Informatics*, 38(1), 2019. У оквиру четврте главе описана је метода из поменутог рада уз детаљни опис још једне методе, такође засноване на методи променљивих околина за решавање истих проблема. Обе методе детаљно су поређене на инстанцама различитих типова и димензија.

5. Остварени резултати и научни допринос дисертације

Када је проблем римске доминације у питању, модификацијама RD1 формулације постигнуто је да се уместо $2|V|$ бинарних променљивих користи $|V|$ бинарних и $|V|$ реалних променљивих, док је модификацијама RD2 формулације, поред поменуте релаксације, број ограничења смањен за $|V|$, где је са $|V|$ означен број чворова посматраног графа. Релаксација променљивих, односно мањи број ограничења, омогућили су да се нешто већи број инстанци оптимално реши коришћењем стандардног оптимизационог решавача CPLEX него што је то био случај раније као и да се до одређених оптималних решења брже дође коришћењем стандардног оптимизационог решавача Gurobi. За проблем ограничене римске доминације први пут је формирана математичка формулација мешовитог целобројног линеарног програмирања. Код проблема слабе римске доминације отклоњена је грешка у формулацији из литературе, доказано је да нова формулација одговара самом проблему и представљена је нова формулација проблема слабе римске доминације. У најгорем случају, односно када се ради о комплетним графовима, нова формулација омогућава да се број ограничења смањи са $O(n^3)$ на $O(n^2)$.

Показано је да алгоритам за егзактно решавање проблема слабе римске доминације на блок-графовима у литератури не решава поменути проблем оптимално. Предложен је нови модел за решавање проблема слабе римске доминације на блок-графовима који посматрани проблем решава оптимално уз доказ његове оптималности. Оба модела тестирана су на истом рачунару и на истом скупу инстанци а на основу добијених резултата јасно се може уочити предност новог алгоритма.

Најзад, поред постојеће методе за хеуристичко решавање проблема римске и слабе римске доминације представљена је још једна таква метода. Обе методе засноване су на методи променљивих околина. Предочене су разлике и сличности између ових метода и дат детаљни приказ резултата њихових тестирања на инстанцама различитих типова и димензија. У односу на методу из литературе, нова метода је углавном давала квалитетнија решења, док се прави допринос ове методе огледа на инстанцама већих димензија које стандарних оптимизациони решавачи и метода из литературе нису могли да реше.

6. Објављени и саопштени резултати који чине део докторске дисертације

1. Marija Ivanović, „A mixed integer linear programming formulation for roman domination problem“, *Publications de l' Mathematique*, 99(113), 51-58, 2016. (M24)
2. Marija Ivanović, „A mixed integer linear programming formulation for restrained roman domination problem“, *Theory of Applications of Mathematics & Computer Science*, 5(2), :110-115, 2015. (M24)
3. Marija Ivanović „Improved integer linear programming formulation for weak roman domination problem“, *Soft Computing*, 22, 6568-6593, 2018. (M22)
4. Marija Ivanović, Dragan Urošević, “A new linear-time algorithm for computing the weak roman domination number of a block graph”, *XIII Balkan Conference on Operational Research Proceedings*, page 25, FON 2018.
5. Marija Ivanović, Dragan Urošević, „Variable neighborhood search approach for solving roman and weak roman domination problems on graphs“ , *Computing & Informatics*, 38(1), 57-84, 2019. (M23)

7. Закључак

Предмет докторске дисертације „Нови приступи у решавању оптимизационог проблема Римске доминације на графовима“, кандидаткиње Марије Ивановић представља један савремен проблем доминације на графовима који се лако може применити на како статичке, тако и на динамичке проблеме. Уместо проблема распоређивања војних формација може се посматрати проблем распоређивања возила хитне помоћи, радио пријемника, болница, ватрогасних станица и многих других ресурса. Такође, проблем римске доминације може се искористити приликом одбрамбених стратегија или приликом постављања надзорног система.

У овој тези доказана су важна тврђења, показане су технике за формирање математичких формулација и технике за развијање одређених алгоритама. Резултати до којих је кандидаткиња дошла су оригинални и нетривијални и делимично или у потпуности објављени у три самостална и два коауторска рада од којих су два рада на SCI листи. Теза је уредно написана, са јасним и систематичним објашњењима и детаљним доказима. При том, кандидаткиња је проучила обимну литературу, показала одлично познавање области и оспособљеност за обављање самосталног научног рада.

Због свега наведеног предлажемо Наставно-научном већу Математичког факултета да прихвати приложени текст као докторску дисертацију Марије Ивановић и одреди комисију за њену јавну одбрану.

Београд, 30.05.2022. године

Чланови комисије:

проф. др Милан Дражић (председник)
редовни професор Математичког факултета
Универзитета у Београду

др Татјана Давидовић
научни саветник
Математички Институт САНУ

др Драган Урошевић
научни саветник
Математички Институт САНУ