

**Научно-наставном већу Математичког факултета  
Универзитета у Београду**

На 363. седници Научно-наставног већа Математичког факултета, одржаној 28. јуна 2019. године, одређени смо за чланове комисије за писање извештаја о докторској дисертацији „Тестови сагласности засновани на  $L^2$  и  $L^\infty$  растојањима и њихова асимптотска ефикасност” кандидаткиње Марије Цупарић. Пошто је прегледала рукопис који је кандидаткиња предала, Комисија подноси Научно-наставном већу Математичког факултета следећи

## **ИЗВЕШТАЈ**

### **1. Биографија кандидаткиње**

Марија Цупарић (рођена Радичевић) рођена је 27.3.1992. године у Чачку, где је завршила основну школу „Вук Караџић” и Гимназију. Основне студије на Математичком факултету, Универзитета у Београду, на смеру Статистика, актуарска и финансијска математика завршила је 2014. године са просечном оценом 9.02. Исте године је уписала мастер студије на Математичком факултету, студијски програм Математика, модул Статистика, актуарска и финансијска математика и положила све испите са просечном оценом 10. Мастер рад под називом „Анализа ризика у животном осигурању” одбранила је 2015. године, под руководством проф. др Павла Младеновића. Докторске студије на Математичком факултету у Београду, студијски програм Математика, уписала је 2015. године. Све испите предвиђене планом положила је са оценом 10.

Од 2014. године запослена је на Математичком факултету, прво као сарадник у настави (2014-2016) а затим и као асистент (2016-до данас) за ужу научну област Вероватноћа и статистика. Држала је вежбе на курсевима: Вероватноћа и статистика А, Вероватноћа и статистика Б, Статистички софтвер 3, Статистички софтвер 4, Математичка статистика, Одабрана поглавља математичке статистике, Биостатистика, Животно осигурање, Линеарни статистички модели и Елементи финансијске математике.

Била је учесник пројекта 174012 Министарства просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије.

### **2. Научни и стручни рад**

#### **2.1. Објављени научни радови**

Марија Цупарић је до сада објавила три рада повезана са тематиком дисертације, од којих су два у часописима са SCI листе. На рецензији су још четири рада и сви су из области дисертације.

1. M. Cuparić, B. Milošević, Ya. Yu. Nikitin, and M. Obradović. Some consistent exponentiality tests based on Puri-Rubin and Desu characterizations. *Applications of Mathematics*, 65(3):245-255, 2020. ISSN 0862-7940, **IF(2017): 0.652** [M23]
2. M. Cuparić, B. Milošević, and M. Obradović. New  $L^2$ -type exponentiality tests. *SORT*, 43(1):25-50, 2019. ISSN: 1696–2281, **IF(2017): 1.344** [M22]
3. M. Cuparić. Approximate Bahadur efficiency of Henze-Meintanis exponentiality tests with comparison. *Matematički vesnik*, 71(1-2):169-179, 2019. ISSN: 0025-5165 [M52]

## 2.2. Научни и стручни скупови:

1. M. Cuparić, B. Milošević, New characterization based goodness-of-fit tests for randomly censored data, CFE-CMStatistics 2020, December 19-21 2020, Virtual Conference. [M32]
2. M. Cuparić, B. Milošević, Ya. Yu. Nikitin, M. Obradović, Novi testovi eksponencijalnosti  $\omega^2$  tipa, X Simpozijum „Matematika i primene”, 6-7.12.2019., Matematički fakultet, Beograd, Srbija [M64]
3. M. Cuparić, B. Milošević, M. Obradović, New class of supremum-type exponentiality tests based on V-empirical Laplace transforms and Puri-Rubin characterization, 21st European Young Statisticians Meeting, July 29 - August 2 2019, Belgrade, Serbia. [M31]
4. M. Cuparić, B. Milošević, M. Obradović, New consistent characterization based goodness-of-fit tests, European Meeting of Statisticians, July 22-26 2019, Palermo, Italy. [M34]
5. M. Cuparić, B. Milošević, M. Obradović, New consistent goodness-of-fit tests based on V-empirical Laplace transforms, CFE-CMStatistics 2018, December 14-16 2018, Pisa, Italy. [M34]
6. M. Cuparić, B. Milošević, M. Obradović, Novi načini za konstrukciju postojanih testova eksponencijalnosti, IX Simpozijum „Matematika i primene”, 6-7.12.2019., Matematički fakultet, Beograd, Srbija [M64]
7. M. Cuparić, B. Milošević, M. Obradović,  $L^2$ -type exponentiality tests based on V-empirical Laplace transform and Puri-Rubin characterization, XIV Serbian Mathematical congress, May 16-19. 2018, Kragujevac, Serbia. [M34]

## 3. Предмет докторске дисертације

Конструкција тестова сагласности са расподелом заузима значајно место у непараметарској статистици. Један од разлога за то је што је познато да не постоји униформно најмоћнији тест против свих алтернативних расподела. Зато је потребно

конструисати батерију тестова који ће имати добре перформансе против што већег броја алтернативних расподела. Већина класичних тестова (на пример тест Колмогоров-Смирнова) заснована је на разлици између претпостављане функције расподеле и емпиријске функције расподеле која је њена постојана оцена. Почетком 21. века постају популарни тестови засновани на разлици између претпостављане Лапласове трансформације расподеле и њене оцене, као и на разлици између других интегралних трансформација и њихових оцена.

Последњих година посебно популаран приступ представља прављење тестова на основу карактеризационих теорема различитог типа. Посебно погодним за конструкцију тестова су се показале карактеризације на основу једнаке расподељености две функције узорка. Како се једнакост у расподели случајних величина може изразити на више начина, могуће је на основу исте карактеризационе теореме конструисати више различитих класа тестова сагласности. Испоставило се да су овакви тестови против неких класа алтернатива веома моћни и ефикасни.

У дисертацији је разматрана примена карактеризација на основу једнаке расподељености две функције узорка, за конструкцију нових тестова сагласности. Представљени су нови тестови чије статистике су формиране као  $L^2$  и  $L^\infty$  растојања  $V$ -емпиријских Лапласових трансформација, како целог тако и непотпуног, односно цензурисаног, узорка. Поред тога, предложени су и тестови засновани на  $L^2$  растојању  $V$ -емпиријских функција расподела.

Да би предложени тестови били погодни за тестирање сложених нултих хипотеза, потребно је да, под нултом хипотезом, буду слободни од параметра расподела одређеним нултом хипотезом. Због тога су тестови, најчешће, уместо на полазни узорак, примењени на трансформисан узорак који садржи оцену непознатог параметра расподеле. Резултујуће статистике су тада  $V$ -статистике са оцењеним параметром или неке функције од њих. До сада су били познати гранични резултати за недегенерисане  $V$ -статистике са оцењеним параметром. У дисертацији су изведени гранични резултати за неке класе дегенерисаних  $V$ -статистике са оцењеним параметром који су даље искоришћени за испитивање асимптотских својстава нових тестова.

Да би се испитао квалитет нових тестова коришћене су две методе. Прва је приближна релативна Бахадурова ефикасност у случају блиских алтернатива, која је примењива и када гранична расподела статистике при нултој хипотези није нормална (што је случај са предложеним тестовима). Друга метода је одређивање емпиријске моћи тестова, при чему се користе Монте Карло симулације и напредне технике реузорковања.

## 4. Садржај докторске дисертације

Докторска дисертација „Тестови сагласности засновани на  $L^2$  и  $L^\infty$  растојањима и њихова асимптотска ефикасност” има 150 страна текста и следећи садржај:

1	УВОД	1
2	ТЕОРИЈА $V$ -СТАТИСТИКА	4

2.1	Статистички функционали . . . . .	4
2.2	$V$ –статистике . . . . .	6
2.3	Асимптотска својства $V$ –статистика . . . . .	9
2.4	Асимптотска својства $V$ –статистика са оцењеним параметром . . . . .	13
2.5	$V$ –емпијске функције . . . . .	40
<b>3</b>	<b>ТЕСТОВИ САГЛАСНОСТИ ЗАСНОВАНИ НА <math>L^2</math> I <math>L^\infty</math> РАСТОЈАЊИМА</b>	<b>44</b>
3.1	Карактеризације . . . . .	45
3.2	Тестови $L^2$ –типа засновани на $V$ –емпијској функцији расподеле . . .	46
3.3	Тестови $L^2$ –типа засновани на $V$ –емпијској Лапласовој трансформацији . . . . .	49
3.4	Тестови $L^\infty$ –типа засновани на $V$ –емпијској Лапласовој трансформацији . . . . .	54
3.5	Одређивање оптималне вредности параметра подешавања . . . . .	58
3.6	Поређење емпијских моћи тестова . . . . .	62
<b>4</b>	<b>АСИМПТОТСКА ЕФИКАСНОСТ ТЕСТОВА САГЛАСНОСТИ</b>	<b>66</b>
4.1	Асимптотска релативна ефикасност . . . . .	67
4.2	Бахадуров нагиб $V$ –статистика . . . . .	69
4.3	Бахадурова асимптотска ефикасност тестова сагласности $L^2$ –типа . . .	73
4.4	Бахадурова асимптотска ефикасност тестова сагласности $L^\infty$ –типа . .	79
4.5	Локална апсолутна Бахадурова ефикасност . . . . .	84
4.6	Поређење тестова сагласности . . . . .	86
<b>5</b>	<b>ТЕСТОВИ САГЛАСНОСТИ ЗА ЦЕНЗУРИСАНЕ ПОДАТКЕ</b>	<b>101</b>
5.1	Типови цензурисања . . . . .	103
5.2	Основни појмови и модели за случајно цензурисане податке с десне стране . . . . .	105
5.3	$V$ –статистике скалиране инверзом вероватноће цензурисања . . . . .	112
5.4	Тестови сагласности . . . . .	124
5.5	Метод реузурковања за апроксимацију $p$ –вредности теста . . . . .	133
<b>6</b>	<b>ЗАКЉУЧАК</b>	<b>140</b>
	Литература (139 библиографских јединица)	141
	Биографија аутора	151

## 5. Приказ садржаја дисертације

Дисертација се састоји из шест претходно наведених поглавља. У првом поглављу кроз реалан пример дата је мотивација и показан је значај тема обрађених у дисертацији. Наредна четири поглавља представљају уже тематске целине и приказују резултате аутора дисертације, заједно са неопходном теоријском позадином. Последње поглавље је закључак са потенцијалним даљим правцима рада аутора, након чега следи литература са 139 библиографских јединица и биографија аутора.

Друго поглавље је посвећено теорији  $V$ -статистика. До сада су били познати гранични резултати за недегенерисане  $V$ -статистике са оцењеним параметрима и слабо дегенерисане  $V$ -статистике са оцењеним параметрима у случају језгра реда два. У овом поглављу је приказан преглед досадашњих резултата који се користе у остатку дисертације и изведени су гранични резултати за одговарајућу класу слабо дегенерисаних  $V$ -статистика са оцењеним параметром реда  $m$ , где је  $m$  паран број.

Нови тестови за тестирање сагласности са експоненцијалном расподелом су представљени у трећем поглављу. Прву групу чине тестови који су засновани на разлици две  $V$ -емпијске функције расподеле. Одређени су њихови гранични резултати при нултој хипотези. Другу групу чине тестови засновани на  $L^2$  растојањима емпиријских Лапласових трансформација. За извођење граничних расподела, под нултом хипотезом, коришћени су резултати из 2. поглавља. Додатно, изведене су и граничне расподеле под алтернативном хипотезом (која не зависи од обима узорка). Ови резултати су значајни јер се могу користити за тестирање других нултих хипотеза. Трећу групу чине тестови засновани на  $L^\infty$  растојању  $V$ -емпијских Лапласових трансформација, за чије извођење граничних својстава је било потребно испитати гранична својства одговарајућих  $V$ -емпиријских процеса. За све предложене тестове одређене су емпиријске моћи уз помоћ Монте Карло симулација. Додатно, за тестове из друге и треће предложене класе разматран је проблем одабира параметра подешавања, који фигурише у изразима за тест статистике, на основу података.

У четвртном поглављу су представљени основни појмови у вези са асимптотском ефикасношћу, али и добијени нови резултати у вези са приближном релативном Бахадуровом ефикасношћу предложених тестова у случају блиских алтернатива. За добијање резултата у случају тест статистика из треће класе било је потребно доказати, између осталог, и теорему Гливенко-Кантелијевог типа за  $V$ -емпиријске Лапласове трансформације. Додатно, урађено је поређење великог броја тестова како класичних, тако и неких тестова развијених у последње време, у погледу Бахадурове релативне ефикасности. За тестове који су коришћени за поређење, за које раније нису били добијени резултати у вези са приближном Бахадуровом асимптотском релативном ефикасношћу, су изведени у овом поглављу.

Сви претходно поменути резултати су добијени за потпуне узорке. Пето поглавље је посвећено модификацији претходно уведених тестова на случајно цензурисане податке с десне стране који представљају важну класу недостајућих података. За сваку посматрану класу тест статистика приказана су асимптотска својства. Поред тога, за апроксимацију  $p$ -вредности уведен је нови метод који представља модификацију класичног бутстрепа метода како би могао да буде примењен на цензурисане податке уз очување расподеле цензора. Коришћење овог метода је теоријски оправдано.

## 5. Закључак

Докторска дисертација „Тестови сагласности засновани на  $L^2$  и  $L^\infty$  растојањима и њихова асимптотска ефикасност” кандидаткиње Марије Цупарић се бави актуелном темом из непараметарске статистике. Садржи значајан број нових резултата који доприносе развоју ове области. Марија Цупарић проучила је већи број научних радова и неколико монографија из области тестирања сагласности са расподелом. Објавила је три научна рада из области дисертације, од којих је један самосталан.

Предлажемо Наставно-научном већу Математичког факултета да рукопис „Тестови сагласности засновани на  $L^2$  и  $L^\infty$  растојањима и њихова асимптотска ефикасност” кандидаткиње Марије Цупарић прихвати као докторску дисертацију и одреди комисију за усмену одбрану.

У Београду, 15.03.2021.

Комисија за преглед и оцену докторске дисертације:

др Павле Младеновић, редовни професор  
Универзитет у Београду, Математички факултет

др Милан Меркле, редовни професор у пензији  
Електротехничког факултета Универзитета у Београду

др Марко Обрадовић, доцент  
Универзитет у Београду, Математички факултет

др Бојана Милошевић, доцент – ментор  
Универзитет у Београду, Математички факултет