

Топологија, геометрија и глобална анализа на многострукостима и дискретним структурама

Абстракт:

Пројекат је замишљен да буде један од важних координатора и носилаца мултидисциплинарних истраживања у области алгебарске топологије, диференцијалне геометрије, глобалне анализе, (тополошке и геометријске) комбинаторике, као и њихових примена у дискретној и рачунарској геометрији и другим обласима.

Пројекат има амбицију да у оквиру заједничког програма истраживања обједини неколико важних математичких дисциплина које долазе свака са својим карактеристичним методама и техникама али које у великој мери деле заједнички предмет и објекте истраживања. Међу заједничким објектима издвајамо (Риманове, Банахове, симплектичке, триангулисане и друге) многострукости, као и симплицијалне комплексе, објекте који су у основи свих поступака и метода за конструкцију и анализу геометријских модела у математици и њеним применама.

Основни очекивани глобални ефекат мултидисциплинарног истраживања је стварање критичне масе за примену сложених техника (еквиваријатне топологије, глобалне анализе, симплектичке и контактне геометрије) за примене на проблеме везане за структуре на многострукостима, проблеме њихове реализације у еуклидским просторима, проблеме дискретизације непрекидних објеката (ћелијске структуре, орјентисани матроиди, парцијална уређења, дискретна векторска поља) итд. Други ефекат је развијање рачунарске топологије и дискретне и рачунарске геометрије, као виталне везе алгебарске топологије и геометријске комбинаторике са применама у информационам и другим технологијама.

Опис истраживања:

Торусна топологија са посебним акцентом на примене у геометрији и комбинаторици конвексних политопа као и везе са алгебарском и симплектичком геометријом торусних варијетета (теореме конвексности за момент пресликавања). У оквиру ове теме очекује се посебно изражена међународна сарадња и интеракција, пре свега са групама у Манчестеру (Nigel Ray) и Москви (Виктор Бухштабер), што у први план избацује теме као што су K -степен и генерализације, кохомологија квазиторусних многострукости, нестандартна торусна дејства итд. Једна од нових идеја је очекивана примена теорије орјентисаних матроида као замена за целобројне матрице (векторске конфигурације).

Нове тенденције у теорији улагања и имерзија многострукости са додатним условима регуларности. Акцент ће бити на изучавању потпуно косих (totally skew) улагања уведених од стране Гомија и Табачникова (M. Ghomi, S. Tabachnikov), као и конвексних (добросуседских) улагања (Gil Kalai) и други.

Конфигурациони простори и њихове компактификације (Fulton-MacPherson, Axelrod-Singer, Концевич) са применама на комбинаторно-геометријске проблеме. Ова тема се, у оквиру познате "конфигурациони-простори и тест-пресликавања" методе, природно везује и за примене еквиваријатних тополошких метода на проблеме партиција маса.

Теорија тополошких парцијално уређених скупова и дискретно-континуалних конвексних политопа, специјално биће изучавана паралела између симплицилних комплекса и Грасманових "непрекидних" комплекса (парцијалних уређења).

Теорија орјентисаних матроида са акцентом на новим формама комбинаторних теорема типа Такера-Ки Фана као и развијању комплексних матроида.

Нека је (M, J) многострукост са скоро комплексном структуром J . Кажемо да је N искошена подмногострукост од M , ако је угао између $J T_p N$ и $T_p N$, тј. тангентног простора подмногострукости и његове слике структуром J константан, тј. не зависи од тачке p на подмногострукости N . Тај константни угао се назива Виртингеров угао, а ако је N површ (тј. димензије 2) Келеров угао. Циљ истраживања је проналажење нових примера као и класификација искошених подмногострукости.

Функционални рачун за комутирајућу фамилију неограничених оператора на Банаховом простору. Реч је о хомоморфизму из што је могуће шире алгебре функција дефинисане на R^n у скуп оператора на Банаховом простору, тако да полиноми буду преликани у њихово уобичајено значење. Посебно изучава се могућност функционалног рачуна на алгебри α пута диференцијабилних функција која је тек нешто ужа од одговарајућег простора Собољева, где је α укупни полиномијални раст решења одговарајућег апстрактног Кошијевог проблема. Изучава се и могућност проширења таквих резултата на такозване неквазихоломорфне функције.

Аксиоматски приступ Фредхолмовој теорији. На датој C^* алгебри уводи се фамилија „коначно димензионих“ пројектора која задовољава одређене аксиоме, а затим се дефинише Фредхолмов оператор као онај оператор који у датој репрезентацији C^* алгебре има затворену слику, а пројектори на језгро и комплемент слике јесу „коначно димензиони“. Изучавају се својства таквих Фредхолмових оператора, посебно теорема о индексу. Посебни случајеви такве теорије јесу класична Фредхолмова теорија, Фредхолмови оператори на фон Нојмановим алгебрама у смислу Атије и Сингера, као и Фредхолмови оператори на C^* модулима. Разматрају се још и могућности уопштења резултата везаних за непрекидност индекса и карактеризацију полу Фредхолмових оператора помоћу мере некомпактности.

Даља класификација E_0 полугрупа. Индекс у потпуности класификује E_0 полугрупе типа 1, док је за полугрупе типа 2 и 3 питање потпуне класификације и даље отворено. Једино се зна да их има непребројиво много неизоморфних. Изучава се могућност конструкције E_0 полугрупа помоћу функције множења на простору CP^∞ која се затим подиже на базни Хилбертов простор. Разматра се да ли су тако добијене E_0 полугрупе међусобно изоморфне или неизоморфне, и разматра се да ли би тако добијена конструкција могла да доведе до нових израчунљивих инваријанти.

Значај истраживања:

Пројекат има амбицију да кроз мултидисциплинарна истраживања на високом међународном нивоу потврди своју истакнуту позицију једног од значајних домаћих пројеката у области геометрије, топологије, глобалне анализе, геометријске и тополошке комбинаторике, дискретне и рачунарске геометрије и њихових примена.

Значај пројекта је и у томе што координира истраживања која захтевају сложене мултидисциплинарне математичке технике у областима математике које се по правилу развијају и негују у већим светским центрима где постоји одговарајућа научна традиција, као и потребна научна експертиза и критична маса научника.

Као илустрацију наводимо да је међу осталима реч "хомологија" једна од истакнутих кључних речи карактеристичних за пројекат као и да је хомологија у математици и њеним применама готово

синоним за анализу глобалних ефеката који по својој природи не допуштају локализацију. Развијање и апликација хомолошких метода (метода хомолошке алгебре) које су оригинално настале у оквиру алгебарске топологије и које улазе у састав свих кључних математичких дисциплина, данас је у форми тзв. перзистентне хомологије у центру истраживања рачунарске топологије и њених примена (анализа слика, препознавању облика, конкурентно израчунавање, итд.).

Као тополошки метод за квалитативну анализу геометријских модела "перзистентна хомологија" је такође у блиској вези са другим проблемима карактеристичним за геометријску комбинаторику и рачунарску геометрију. Пројекат је један од главних носилаца и координатора истраживања у овим областима, специјално кроз развијање тополошких техника у проблемима као што су: (а) кооперативно или компетитивно делење објеката између два или више субјеката, (б) формулисање и доказивање теорема коинциденције и фиксних тачака непрекидних пресликавања што је често и једини ефикасан начин да се добије доказ о постојању еквилибријума у неким класама динамичких система, (ц) конструисање и анализа геометријских конфигурационих простора који моделују стања физичког система, простор свих израчунавања у неком геометријском алгоритму, итд. Истраживања на пројекту већ традиционално у наведеном тематском оквиру окупљају неке од наших истакнутих математичара и научних тимова који негују интензивну међународну сарадњу, обезбеђују праћење најновијих токова у савременој математици као и освајање нових, технолошки сложених области математике и нових техника истраживања. У овом пројекту раде неки од врло познатих домаћих научних семинара (нпр. семинар Комбинаторика у геометрији, топологији и алгебри (ЦГТА), као заједнички семинар Математичког института САНУ и Математичког факултета у Београду), што ствара врло повољан амбијент за координацију истраживања, размену и дисеминацију математичких идеја, али и за формирање и развој научног подмлатка и популаризацију математике.

Пројекат је у координацији са тематски комплементарним пројектом везаним за изучавање динамичких система (руководилац Владимир Драговић, у оквиру Математичког института САНУ као матичном институцијом) носилац рада у центру изврности "Dynamical Systems, Geometry and Combinatorics" <http://www.mi.sanu.ac.rs/dsgc/dsgc.htm>. Ово организовање се показало као одлична основа и за регионалну сарадњу и контакт са математичарима из суседних балканских земаља, као и за сарадњу са највећим математичким центрима (Универзитет у Манчестеру (Nigel Ray), Стеклов институт руске академије наука у Москви (Виктор Бухштабер), итд.

Искошене подмногострукости су важна класа подмногострукости које уопштавају скоро комплексне и тотално реалне подмногострукости (њихови Виртингерови углови су редом 0 и 90 степени).

Репрезентације функција оператора или њихове фамилије имају примене у најразличитијим областима, као што су оцена норме решења диференцијалних једначина, оцене резолвенте, или успона оператора.

Фредхолмова теорија заузима значајно место у савременој математици, и има примене у најразличитијим областима, од интегралних једначина па до алгебарске топологије и некомутативне геометрије.