

Наставно-научном већу
Математичког факултета
Универзитета у Београду

Извештај о докторској дисертацији
„МЕРЕ НЕКОМПАКТНОСТИ НА ХИЛБЕРТОВИМ
 C^* -МОДУЛИМА“
кандидата мр Златка Лазовића

На седници Наставно научног већа одржаној 11. септембра 2015. године одређени смо за чланове комисије за писање извештаја о докторској дисертацији под насловом *Мере некомпактности на Хилбертовим C^* -модулима* кандидата мр Златка Лазовића. Након што је кандидат предао рукопис, комисија је исти прегледала, те подноси Наставно-научном већу следећи извештај.

1. Биографија кандидата

Златко Лазовић је рођен 17.10.1977. у Новом Пазару. Завршио је основну школу „Братство“ и Гимназију у Новом Пазару. Математички факултет Универзитета у Београду, смер Нумеричка математика и оптимизација, уписао је 1996. године, а завршио га је 2004. године са просечном оценом 9,58. Магистарску тезу под насловом „Фредхолмови оператори на Хилбертовим C^* -модулима“ одбранио је 2010. године на истом факултету.

Запослен је на Математичком факултету у Београду од 2005. године. Држао је вежбе на следећим предметима: Математика 1 (за студенте физике), Анализа 1, Анализа 2, Методика наставе математике Б и Теорија мере и интеграције.

Објавио је следеће научне радове:

1. D. J. Kečkić and Z. Lazović, Fredholm operators on C^* -algebras, Acta Sci. Math. (Szeged) 83 3-4 (2017), pp. 629-655.
2. D. J. Kečkić and Z. Lazović, Compact and "compact" operators on the standard Hilbert module over a W^* algebra, Ann. Funct. Anal. 9 no. 2 (2018), pp. 258-270.
3. Z. Lazović, Compact and compact operators on standard Hilbert modules over C^* - algebras, Adv. Oper. Theory, 3 no. 4 (2018), pp. 829-836.
4. D. J. Kečkić and Z. Lazović, Measures of noncompactness on the standard Hilbert C^* -module, Filomat, in press.

Имао је следећа саопштења на научним конференцијама:

1. Z. Lazović, The space of operator valued functions seen as Hilbert H -module, Peta matematička konferencija Republike Srpske, Trebinje, 2015.
2. Z. Lazović, Compact and compact operators on standard Hilbert modules over C^* - algebras, XIV Kongres matematičara Srbije, Kragujevac, 2018.

2. Предмет докторске дисертације

Предмет докторске дисертације је појам компактности на Хилбертовим C^* -модулима, односно модулима над датом C^* -алгебром A са A -вредносним унутрашњим производом. Аналогно операторима коначног ранга на Хилбертовим просторима, на Хилбертовом C^* -модулу M над алгебром A дефинише се за два дата вектора $x, y \in M$ оператор $\Theta_{x,y} : M \rightarrow M$, $\Theta_{x,y}(z) = x \langle y, z \rangle$. Затворење A -линеарног омотача оператора $\Theta_{x,y}$ назива се идеал „компактних“ оператора, а наводници се стављају како би се истакла чињеница да ти операстори нису компактни онако како се тај појам дефинише у оквиру Банахових простора, тј. да није реч о операторима који пресликавају ограничене у релативно компактне скупове.

Предмет истраживања докторске дисертације чини покушај да се нађе погодна топологија на датом Хилбертовом C^* -модулу таква да скупови релативно компактни у односу на њу буду сагласни са „компактним“ операторима. Слободније речено налажење топологије која би омогућила уклањање наводника. Осим избора топологије, дисертација се бави и појмом мере некомпактности, односно погодним нумеричким показатељем колико дати скуп одступа од компактног.

3. Садржај дисертације

Дисертација садржи $x + 137$ страна, садржај, списак од 67 референци и главни део који је подељен у 4 главе.

Прва глава је припремног карактера, и садржи укратко изложене до сада познате резултате, и то: у потпоглављу 1.1. о мерама некомпактности на метричким просторима, у потпоглављу 1.2. о мерама некомпактности на униформним просторима, и у потпоглављу 1.3. о C^* -алгебрама и Хилбертовим C^* -модулима.

Друга глава је посвећена избору погодне топологије на стандардном Хилбертовом C^* -модулу и подељена је на два потпоглавља. У потпоглављу 2.1. излажу се резултати из рада [32] (заједнички рад кандидата и ментора) у којем је уведена топологија τ на стандардном Хилбертовом модулу $l^2(A)$ над W^* -алгебром A помоћу система полунорми

$$p_{\varphi,y}(x) = \sqrt{\sum_{n=1}^{+\infty} |\varphi(\eta_n^* \xi_n)|^2}, \quad x = (\xi_n) \in l^2(A),$$

где је φ нормално стање на A , а η_n елементи алгебре A који испуњавају услов

$$\sup_{n \geq 1} \varphi(\eta_n^* \eta_n) \leq 1.$$

Постојање нормалних стања обезбеђује то што се посматра посебан случај W^* -алгебре.

У потпоглављу 2.2. излажу се резултати рада [40] – самостални рад кандидата у којем се резултати претходног потпоглавља преносе на стандардни Хилбертов многул над произвољном C^* -алгебром, тако што се посматра њен бидуал који је увек W^* -алгебра, а затим стандардни Хилбертов модул проширује новим избором скалара на стандардни начин.

Трећа глава посвећена је мерама некомпактности у односу на топологију описану у другој глави. Излажу се резултати заједничког рада кандидата и ментора [33]. Посматрају се четири врсте мера некомпактности. То је, пре свега, мера некомпактности λ чија дефиниција не зависи од ново уведене топологије, и која се дефинише тако да мери колико дати скуп одступа од скупа који се може сместити унутар неког пројективног коначно генерисаног модула. Затим посматрају се и уопштења познатих мера некомпактности Хауздорфа, Куратовског и Истрцескуа, овај пут на стандардном Хилбертовом модулу са ново уведеном топологијом, али посматраном као униформни простор. Изводе се њихове међусобне везе. Међу занимљивије резултате убрајамо неједнакост:

$$I(E) \leq \alpha(E) \leq 2\chi(E) \leq 2\lambda(E) \leq 2\sqrt{\|E\|I(E)},$$

где је I Истрцескуова мера некомпактности, α мера Куратовског, а χ Хауздорфова, док је E уравнотежен скуп у стандардном Хилбертовом модулу над $B(H)$, а $\|E\|$ његов радијус.

У четвртој глави изложени су резултати добијени у заједничком раду кандидата и ментора [34], који се односе на уопштење појма Фредхолмових оператора до нивоа произвољне C^* -алгебре тако што су дефинисани елементи „коначног типа“ на аксиоматски начин као елементи неког самоадјунгованог двостраног идеала који има апроксимативну јединицу сачињену од пројектора, и у којем је могуће сабрати ма које две класе пројектора у односу на Мареј-фон Нојманову релацију еквиваленције. За елемент a дате C^* -алгебре, кажемо да је Фредхолмовог типа, ако постоје ортопројектори p и q коначног типа такви да је $a' = (1 - q)a(1 - p)$ „инвертибилан“, односно ако постоји елемент $b \in A$ такав да је $(1 - p)b(1 - q) = b$ и $ba' = 1 - p$, $a'b = 1 - q$. Изведена је теорема о индексу за тако дефинисане Фредхолмове операторе, локална константност индекса, константност индекса у односу на пертурбацију елементом коначног типа, као и уопштење Аткинсонове теореме. Показано је да су класични Фредхолмови оператори на Хилбертовом простору, Фредхолмови оператори у смислу Бројера, односно Атије и Сингера на својствено бесконачној фон Нојмановој алгебри, као и Фредхолмови оператори на Хилбертовом C^* -модулу над унитарном C^* -алгебром у смислу Мишченка и Фоменка посебни случајеви ново уведене теорије.

4. Закључак и предлог

Предмет докторске дисертације мр Златка Лазовића је савремена и мора се рећи потпуно неистражена област. Резултати приказани у дисертацији су оригинални и нетривијални. Њихово извођење је захтевало употребу различитих метода и техника математичке анализе, пре свега основне технике рада са Хилбертовим модулима, затим са W^* и C^* -алгебрама, технике рада са тензорским производима. Рад кандидата на овој дисертацији укључио је и проучавање обимне литературе, упознавање са савременим резултатима и њихову примену на постављене проблеме. Резултати дисертације садржани су у четири рада објављена или прихваћена за објављивање у научним часописима са рецензијом, од којих се два налазе на SCI листи, док је један од радова самосталан.

Стога предлажемо Наставно научно већу Математичког факултета да усвоји извештај комисије о докторској дисертацији кандидата мр Златка Лазовића и одреди комисију за усмену одбрану.

У Београду, 23. маја, 2019. године,

КОМИСИЈА:

др Милош Арсеновић, редовни професор

др Иван Аранђеловић, редовни професор Машинског факултета у Београду

др Драгољуб Кечкић (ментор), ванредни професор

др Ђорђе Кртинић, ванредни професор