

ИЗВЕШТАЈ

Одлуком Наставно-научног већа Математичког факултета одређени смо у комисију за преглед и оцену докторске дисертације Самире Зеаде (Samira Milad Salih Zeada) под насловом „Classification of Monomial Orders In Polynomial Rings and Gröbner Basis“ - „Класификација мономијалних уређења у полиномијалним прстенима и Гребнерове базе“. После прегледа рукописа, подносимо овај извештај.

Рукопис је сложен на рачунару, има 54 странице и следећа поглавља: 1. Introduction - Увод, 2. Multivariate polynomials and term orders – Полиноми са више променљивих и мономијална уређења, 3. Multivariate reduction and division – Редукција и дељење полинома са више променљивих, 4. Gröbner basis – Гребнерова база. Литература на крају рада садржи 24 библиографске јединице.

Садржај дисертације

Као што наслов каже, предмет изучавања у овој дисертацији су мономијална уређења и Гребнерове базе у прстенима полинома над пољем. Ова тема је постала веома популарна и значајна у последњих неколико деценија, од како је Бухбергер у својој докторској дисертацији (Universität Innsbruck, 1965) увео појам Гребнерове базе, назвавши га по свом професору и ментору Волфгангу Гребнеру (Wolfgang Groebner). Гребнерове базе се веома много користе у алгоритмима за симболички алгебарски рачун.

У ранијим необјављеним истраживањима ментора А. Липковског разматране су могућности утицаја на брзину израчунавања Гребнерове базе избором члана за наредну редукцију. Накнадно се испоставило да се тај проблем повезује са класификацијом мономијалних уређења у полиномијалном прстену са више променљивих. Потпуна класификација мономијалних уређења била је откривана више пута, почев од руске школе полугрупа у првој половини XX века. Колико год то било чудно, тек је радовима у последњим деценијама XX и првој деценији XXI века показана веза ове класификације са Гребнеровим базама, преко појма Гребнерове лепезе и Гребнерове шетње, за шта су најзаслужнији математичари Робиано (Lorenzo Robbiano) и Штурмфелс (Bernd Sturmfels) (в. на пример дисертацију Ruth Lynn Auerbach “The Gröbner fan and Gröbner walk for modules” из 2003. која уопштава случај идеала на модуле над полиномијалним прстеном). Радна хипотеза је да постоји веза између Гребнерове лепезе и Њутновог полиедра односно полигона (в. на пример Lipkovski A.: Newton

polyhedra and irreducibility, Math Z 199, 1988, 119-127), и на њој се радило у случају две променљиве. У истраживању су коришћене методе алгебре, елементарне и конвексне геометрије, као и комбинаторике.

Прикажимо садржај и главне доприносе ове докторске дисертације

У првој глави (стр. 1-6) дате су дефиниције, особине и примери основних појмова којима се бави ова теза, укључујући преглед релевантних својстава прстена полинома са више променљивих и алгорита дељења с остатком.

У глави 2 (стр. 7-22) детаљно је изложена класификација мономијалних уређења прстена полинома са више променљивих, са посебним освртом на случај две променљиве. Детаљно је изложена веза ове класификације и познате класификације до које је дошао Робино. Необична је и мало позната чињеница да је скуп различитих мономијалних уређења топологизиран природном топологијом у ствари Канторов скуп.

Главе 3 (стр. 23-40) и 4 (стр. 41-51) садрже главне доприносе овог рада. У Глави 3 се презентује нови приступ анализи алгорита дељења с остатком, базиран на скуповној теорији парцијалних уређења (одељак 3.3). Тиме је добијен нови доказ Бухбергеровог резултата о коначности поступка дељења без обзира на редослед избора главног члана за наредно дељење. Исто тако, у циљу сагледавања оригиналног Хилбертовог доприноса и везе са каснијим разматрањима, приказан је Хилбертов поступак доказа чувене теореме о бази на основу његових оригиналних радова (одељак 3.5).

У Глави 4 (стр. 41-51) резултат из Главе 3 је искоришћен да се добије још једна, нова карактеризација Гребнерове базе, привидно слабија од познатих. Наиме, показује се да је база $G=\{f_1, \dots, f_k\}$ идеала I Гребнерова ако и само ако је за свако f из I , носач $\text{Supp}_G f$ није празан. Овај је услов (само привидно) слабији од уобичајеног услова да водећи члан у f припада носачу $\text{Supp}_G f$.

На крају рада дат је преглед литературе, који садржи 24 библиографске јединице са радовима релевантним за проблематику полиномијалних прстена и Гребнерових база.

Резултате истраживања сакупљених у овој дисертацији аутор је излагао на научним скуповима и објавио у више радова, а главне резултате је објавио у научном раду у часопису са SCI листе са импакт фактором. Дајемо хронолошки списак излагања и научних радова кандидата.

1. С. Зеада: излагање на Семинару Катедре за алгебру и математичку логику Математичког факултета Универзитета у Београду 19.11.2012.
2. S. Zeada: "Polynomial division and Gröbner basis". The Teaching of Mathematics, 2013, XVI, 1, pp. 22–28,
3. S. Zeada: "On a geometrical approach to bivariate monomial orders and Gröbner fans". Matematički Vesnik (прихваћено уз корекције, рад у припреми), 2014,
4. А. Липковски, С. Зеада: "A note on multivariate polynomial division and Gröbner bases ", 13. српски математички конгрес, Врњачка Бања, 22-25 мај 2014,
5. А. Lipkovski, S. Zeada: "A note on multivariate polynomial division and Gröbner bases". Publications de l'Institute Mathematique, 2014, DOI: 10.2298/PIM141104001L

Закључак

Предложена теза је занимљива и актуелна и представља даљи развој теорије Гребнерових база. Дат је преглед најновијих резултата ове теорије, посебно класификација мономијалних уређења, есенцијалних за увођење алгорита делења с остатком и појма Гребнерове базе у прстенима полинома више променљивих над пољем. Посебно је значајан резултат теореме која даје нови услов за утврђивање да ли је нека база полиномијалног идеала Гребнерова, привидно слабији од досадашњих стандардних услова. Резултати ове дисертације дали су конкретан допринос у области алгебре. Они такође отварају велики број питања и могућности за даљи рад на овој теми, посебно питања може ли се избором уређења (што је веома распрострањена тема последњих година) или избором процедуре делења (што је нови допринос овог рада) утицати на брзину алгорита за одређивање Гребнерове базе полиномијалног идеала.

С обзиром на изложено у овом извештају, Комисија предлаже Наставно-научном већу да прихвати извештај, одобри одбрану докторске дисертације и одреди комисију за одбрану кандидата Самире Зеаде.

У Београду, 16. јануара 2014.

др Жарко Мијајловић, редовни професор

др Александар Липковски, редовни професор

др Драгана Годорић, доцент

др Бранко Малешевић, ванредни професор
(Електротехнички факултет Универзитета у Београду)