

Наставно-научном већу Математичког факултета Универзитета у Београду

На седници Наставно-научног већа Математичког факултета Универзитета у Београду, која је одржана 26. 4. 2024., именовани смо за чланове Комисије за оцену докторске дисертације *Комбинаторни проблем сакупљања купона са проширеном колекцијом* докторанда Бојане Тодић. После прегледа рукописа који је Бојана Тодић предала комисији, подносимо Наставно-научном већу следећи

ИЗВЕШТАЈ

1 Биографија

Бојана Тодић је рођена 2. јануара 1993. у Суботици. Уписала је основне студије на Математичком факултету (смер Статистика, актуарска и финансијска математика) 2011. године, а завршила 2015. године са просеком 9.00. Мастер студије је завршила на истом смеру 2016. године, са просеком 9.75, одбравивши мастер рад под насловом *Обезбеђење од ризика у финансијској математици*. Докторске студије на Математичком факултету у Београду је уписала 2016. године. Положила је све испите предвиђене планом и програмом са оценом 10.

Од 2015. до 2017. била је запослена као сарадник у настави, а од 2017. је запослена као асистент на Математичком факултету. До сада је држала вежбе на 13 курсева на основним и мастер студијама на Математичком факултету и на једном курсу на мастер студијама Индустрија 4.0 на Машинском факултету Универзитета у Београду.

Била је учесник пројекта 174012 Министарства просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије.

2 Научни рад

Бојана Тодић објавила је до сада четири рада из области дисертације и учествовала на шест научних скупова где су презентовани резултати из области дисертације. У наставку је детаљан списак радова и учешћа на конференцијама.

Објављени радови

1. Todić, B., Coupon collector problem with penalty coupon, *Matematički Vesnik*, 2024, 76(1-2), 15-28 (M24)
2. Jocković, J., Todić, B., Some bounds on the coupon collector problem with universal coupon, *Analele Stiintifice ale Universitatii Ovidius Constanta*, 2023, прихваћен за штампу (M22 IF2021=0.886)

3. Jocković, J., Todić, B., Waiting time for a small subcollection in the coupon collector problem with universal coupon, *Journal of Theoretical Probability*, 2023, DOI:10.1007/s10959-023-01312-2 (**M23 IF2022=0.8**)
4. Jocković, J., Todić, B., Coupon collector problem with reset button, *Mathematics*, 2024, 12(2), 239, DOI:10.3390/math12020239 (**M21a IF2022=2.4**)

Саопштења на научним скуповима

1. Todić, B., Neke varijante problema sakupljanja kupona, XLV Symposium on Operational Research, Zlatibor, Serbia, September 16-18, 2018 (рад објављен у целости у зборнику радова, стр. 442-446), презентујући аутор
2. Todić, B., Jocković, J., Coupon collector problem with universal coupon, ASM-DA2021 International Conference and Demographics 2021 Workshop, Athens, Greece, June 1-4, 2021, (Abstracts, p. 78), презентујући аутор
3. Todić, B., Jocković, J., Bounds on the coupon collector problem, XLIX Symposium on Operational Research, Vrnjačka banja, Serbia, September 22-25, 2022, (Proceedings, p. 601), презентујући аутор
4. Todić, B., Coupon collection problem: mean waiting time to complete collection, Drugi susret matematičara Srbije i Crne Gore, Belgrade, Serbia, January 26-28, 2023, (Abstracts, p. 7), презентујући аутор
5. Jocković, J., Todić, B., Collecting two sets of coupons: some real-life interpretations, Drugi susret matematičara Srbije i Crne Gore, Belgrade, Serbia, January 26-28, 2023, (Abstracts, p. 7), коаутор
6. Todić, B., Jocković, J., Coupon collector problem with universal coupon - properties and some bounds, XIII Simpozijum *Matematika i primene*, Beograd, Srbija, 1.-2. decembar, 2023 (Abstracts, p. 71), презентујући аутор

3 Предмет дисертације

Комбинаторни проблем сакупљања купона (у даљем тексту: ПСК) је познат још из 18. века, а интензивније се разматра у математичкој литератури од шездесетих година 20. века. Основни (класични) ПСК се може једноставно описати на следећи начин: сакупљач (колекционар) жели да попуни албум са n различитих сличица, тако што полази од празног албума и сваког дана купује (на случајан начин извлачи) једну сличицу. Основна величина која се у контексту овог проблема анализира је случајна величина која представља број дана до попуњавања албума (колекције), позната као време чекања до комплетирања колекције. Претпоставља се да је број расположивих купона сваког од типова велики, па се може сматрати да је у питању одабир са враћањем.

На ПСК се односе различити типови математичких резултата, мотивисани, између осталог, могућностима примене овог проблема у биологији, инжењерству и рачунарству. Такође, формулисана су разноврсна уопштења класичног

ПСК, која се могу добити на више начина (на, пример, дефинисањем нових захтева при сакупљању колекције, посматрањем више колекционара и дефинисањем неког односа између њих, дозвољавањем могућности групног извлачења купона, итд.). Посебна класа уопштења се добија допуњавањем основног скупа купона (скупа стандардних купона) купонима специјалне намене, који на неки начин утичу на брзину и ток сакупљања колекције. Тако се добија проблем сакупљања купона са проширеном колекцијом.

Предмет ове дисертације су дефинисање и извођење особина три нова уопштења ПСК са проширеном колекцијом. Добијени су тачни и асимптотски резултати који се односе на расподелу времена чекања и очекивано време чекања до комплетирања колекције, као и неке процене тих величина, под условима који важе за одговарајуће уопштење. То су, између осталог, резултати који уопштавају оне добијене у радовима Shioda (2007), Anceaume et al. (2015), као и више познатих резултата који се односе на класични ПСК.

За добијање резултата су, уз стандардне вероватносне технике, коришћени резултати који се односе на коначне ланце Маркова, математичка индукција, технике мајоризације, технике рада са асимптотским развојима, различити комбинаторни идентитети и особине специјалних функција.

4 Приказ дисертације

Дисертација је написана на $ix + 91$ страна. Главни део дисертације је подељен на Увод и четири главе. Литература се састоји од 56 библиографских јединица. Структура је следећа:

1	Увод	1
1.1	Помоћне леме и ознаке	3
1.2	Помоћни резултати Марковљевих процеса	5
1.3	Помоћни резултати теорије мајоризације	7
2	Класични проблем сакупљања купона и његова уопштења	9
2.1	Класични проблем сакупљања купона	9
2.2	Уопштења проблема сакупљања купона са проширеном колекцијом	10
3	Проблем сакупљања купона са универзалним купоном	13
3.1	Приступ преко ланаца Маркова	16
3.2	Матрица вероватноћа прелаза за $k \geq 1$ корака и фундаментална матрица	19
3.3	Особине времена чекања $W_{n,n}$ и $W_{n,c}$	22
3.4	Асимптотске особине времена чекања $W_{n,c}$	33
3.5	Горња и доња граница функције расподеле времена чекања $W_{n,c}$	41
4	Проблем сакупљања купона са купоном који омета комплетирање колекције	57

4.1	Проблем сакупљања купона са купоном који омета комплетирање колекције као Марковљев ланац	58
4.2	Особине времена чекања W_n^\diamond	60
4.3	Фундаментална матрица и њена примена	62
4.4	Веза са случајним лутањем	68
5	Проблем сакупљања купона са купоном који празни колекцију	72
5.1	Расподела времена чекања до комплетирања колекције	73
5.2	Примена техника Марковљевих ланаца на случај са једнаким вероватноћама избора купона	75
5.3	Асимптотске особине очекиваног времена чекања v_1 и u_0	82
6	Закључак	85

Прва, уводна, глава садржи преглед помоћних резултата који су коришћени за добијање резултата у дисертацији.

У другој глави дисертације (*Класични проблем сакупљања купона и његова уопштења*) дат је преглед најважнијих резултата који се односе на класични ПСК и описана су уопштења базирана на проширивању колекције купона која већ постоје у литератури (Nakata, Kubo (2006), Wild et al. (2013)). Посебна пажња је посвећена нултом купону (који је дефинисан као купон који је могуће извући, али који не припада траженој колекцији купона, па тиме успорава њено комплетирање), који је разматран у радовима Anceaume et al. (2015), Anceaume et al. (2016) и представља полазну идеју за ову дисертацију.

Нова уопштења ПСК су дефинисана и анализирана у трећој, четвртој и петој глави дисертације.

У трећој глави дисертације разматран је ПСК са универзалним купоном, проблем који директно уопштава ПСК са нултим купоном. Универзални купон је дефинисан као купон који не припада колекцији стандардних купона, али може да замени сваки од њих, а време чекања које се анализира је

$$W_{n,c} = \inf\{t \in \mathbb{N} : Y_t + Z_t = c\}, \quad 1 \leq c \leq n,$$

где су Y_t и Z_t , редом, број стандардних купона и број универзалних купона извучених до тренутка (дана) t . Претпоставља се да се универзални купон извлачи са вероватноћом p_U , нулти купон извлачи са вероватноћом p_N , а збир вероватноћа стандардних купона је $1 - p_U - p_N$.

За случај када се сви стандардни купони извлаче са истом вероватноћом $p = \frac{1-p_U-p_N}{n}$ одређено је асимптотско понашање првог и другог момента случајне величине $W_{n,c}$, за четири карактеристичне комбинације вероватноћа p_U, p_N, p , када n неограничено расте, а c је фиксирано. Ови резултати уопштавају познате резултате везане за класични ПСК и део резултата из рада Anceaume et al. (2015).

Даље, пошто се једноставно закључује да број извучених стандардних и универзалних купона, индексирани временом, представља дводимензиони ланац Маркова, одређена је фундаментална матрица која одговара овом ланцу. То је омогућило да се изведе резултат који је карактеристичан за ово уопштење

ПСК: вероватноћа да се сакупљање купона заврши на један од $n + 1$ могућих начина, ако је познато да је извучено укупно n купона.

За случај када се стандардни купони извлаче са произвољним вероватноћама чији је збир $1 - p_U - p_N$ уз помоћ техника мајоризације одређена је фамилија горњих и доњих граница за први и други моменат случајне величине $W_{n,c}$, са идејом да се превазиђу познате рачунске тешкоће које се појављују при израчунавању ових величина. На основу резултата нумеричких експеримената и процене рачунске захтевности, предложене су најпогодније границе из ове класе, као компромис између једноставности и прецизности. Овај резултат директно уопштава одговарајући резултат за класични ПСК дат у раду Shioda (2007).

У четвртој глави дисертације разматран је ПСК са купоном који омета комплетирање колекције (казненим купоном). Казнени купон не припада колекцији, али мења циљ експеримента, у смислу да је време чекања које се анализира у овом случају једнако

$$W_n^\diamond = \inf\{t \in \mathbb{N} : |Y_t - Z_t| = n\},$$

где су Y_t и Z_t број стандардних и казнених купона, редом, извучених до тренутка (дана) t . Другим речима, анализира се време чекања до појаве свих стандардних купона без ометања или појаве за n више казнених него стандардних купона. Претпоставља се да се казнени купон извлачи са вероватноћом $0 \leq p_\diamond < 1$, а да се сви стандардни купони извлаче са истом вероватноћом $\frac{1-p_\diamond}{n}$.

Комбинаторним закључивањем добијена је расподела случајне величине W_n^\diamond и изведена једноставна процена њене средње вредности. Ово уопштење је даље разматрано као дводимензиони ланац Маркова, одређена је одговарајућа фундаментална матрица и показана веза између овог проблема и једнодимензионог случајног лутања са две апсорбујуће баријере.

У петој глави дисертације је разматран ПСК са купоном који празни колекцију (ресет купон), у смислу да скуп стандардних купона извучених у току првих t дана постаје празан ако се ресет купон извуче $t + 1$ -вог дана. Претпоставља се да се ресет купон извлачи са вероватноћом $0 \leq p_R < 1$, а збир вероватноћа извлачења стандардних купона је $1 - p_R$. Анализирана је случајна величина $W_n^{(\otimes)}$, која представља време чекања до комплетирања колекције. У случају када стандардни купони имају произвољне вероватноће чији је збир $1 - p_R$ комбинаторним закључивањем је изведена расподела ове случајне величине.

У случају када се сви стандардни купони извлаче са истом вероватноћом, уз помоћ особина одговарајуће конструисаних ланаца Маркова и особина специјалних функција, изведена је једноставна веза између средњег времена чекања $E(W_n^{(\otimes)})$ и бета функције. То је омогућило процену асимптотског понашања ове величине када n неограничено расте за разне вредности вероватноће p_R .

Резултати из трећег, четвртог и петог поглавља ове представљају оригинални научни допринос ове докторске дисертације, а објављени су у једном самосталном и три коауторска рада докторанда. Све ово је наведено у делу 2 овог извештаја.

5 Закључак

У раду су дефинисана и анализирана три уопштења проблема сакупљања купона, која до сада нису разматрана у математичкој литератури и добијено је неколико различитих типова научних резултата који уопштавају сродне резултате за основни проблем, и имају могућу примену у више научних области.

Кандидаткиња је у тези показала одлично познавање области и математичке литературе, способност да самостално истражује и изводи сложене математичке закључке, као и да их на одговарајући начин прикаже.

Кандидаткиња Бојана Тодић је до сада објавила три коауторска рада у часописима са SCI листе и један самостални рад. На основу свега тога и пошто су испуњени и сви формални услови, предлажемо да се рукопис *Комбинаторни проблем сакупљања купона са проширеном колекцијом* прихвати као докторска дисертација из математике и да се закаже њена јавна одбрана.

У Београду,

Чланови комисије:

др Бојана Милошевић, ванредни професор
Универзитет у Београду
Математички факултет

др Марко Обрадовић, доцент
Универзитет у Београду
Математички факултет

др Горан Попивода, ванредни професор
Универзитет Црне Горе
Природно-математички факултет