

Наставно-научном већу  
Математичког факултета  
Универзитета у Београду

Одлуком Наставно-научног већа Математичког факултета Универзитета у Београду донетом на 343. Седници одржаној 30.06.2017. године именовани смо у Комисију за преглед и оцену рукописа

**„Проблеми хаб максималног покривања - нови математички модели и методе решавања“**,

који је кандидаткиња **Оливера Станчић** поднела као своју докторску дисертацију. Комисија је предати рукопис пажљиво прочитала и подноси Наставно-научном већу следећи

## **ИЗВЕШТАЈ**

### **Биографија кандидата**

Оливера Станчић (Јанковић) је рођена 14.04.1987. године у Крушевцу, где је завршила основну школу и Гимназију са одличним успехом. Математички факултет у Београду, смер Нумеричка математика и оптимизација, уписала је 2006. године. Дипломирала је 2010. године, са просечном оценом 9.50. Исте године је уписала мастер студије на Математичком факултету у Београду, смер Нумеричка математика и оптимизација. Мастер рад под насловом „Методе решавања транспортног проблема“, одбранила је 11.10.2011. године, чиме је стекла звање Дипломирани математичар - мастер. Докторске студије на Математичком факултету у Београду, смер Нумеричка математика и оптимизација, уписала је 2011. године. Положила је све испите предвиђене планом и програмом докторских студија са просечном оценом 9.75. Запослена је на Економском факултету Универзитета у Крагујевцу где је од марта 2011. до марта 2013. године радила као сарадник у настави, а од марта 2013. године је изабрана у звање асистента на Катедри за информатику и квантитативне методе. Од 2011. године до данас изводи рачунске вежбе на предмету Математика у економији на основним студијама, на Економском факултету у Крагујевцу. Од 2011. године ангажована је на пројекту Министарства просвете, науке и технолошког развоја под називом „Апроксимација интегралних и диференцијалних оператора и примене“.

## Предмет дисертације

Предмет дисертације „Проблеми хаб максималног покривања - нови математички модели и методе решавања“ су проблеми који припадају класи проблема хаб максималног покривања (енгл. *Hub Maximal Covering Problems - HMCPs*). Циљ ових проблема је одређивање оптималних локација за успостављање унапред задатог броја хабова, тако да укупни проток међу свим покривеним паровима снабдевач-корисник буде максималан, уз претпоставку бинарног или парцијалног покривања.

У дисертацији су разматране три варијанте проблема хаб максималног покривања: проблем  $p$ -хаб максималног покривања неограничених капацитета са једноструким алокацијама (енгл. *Uncapacitated Single Allocation  $p$ -hub Maximal Covering Problem - USApHMCP*), проблем  $p$ -хаб максималног покривања неограничених капацитета са вишеструким алокацијама (енгл. *Uncapacitated Multiple Allocation  $p$ -hub Maximal Covering Problem - UMApHMCP*) и проблем  $p$ -хаб максималног покривања неограничених капацитета са  $r$ -алокацијском шемом (енгл. *Uncapacitated  $r$ -allocation  $p$ -hub Maximal Covering Problem - UrApHMCP*). За сва три проблема анализирана су оба концепта покривања - бинарно и парцијално, при чему проблем UrApHMCP није разматран у досадашњој литератури. Сва три разматрана проблема хаб максималног покривања су NP-тешки проблеми комбинаторне оптимизације. У случају USApHMCP, за задати скуп хабова, добијени потпроблем оптималне алокације не-хаб чворова успостављеним хабовима је такође NP-тежак.

У дисертацији су предложени нови математички модели за USApHMCP са бинарним и парцијалним покривањем. Главна предност нових модела, у односу на постојеће моделе из литературе, огледа се у чињеници да се нови модели малим модификацијама лако трансформишу у нове моделе за проблеме  $p$ -хаб максималног покривања са различитим алокацијским шемама. Прецизније, из предложених модела за USApHMCP произилазе нови модели за UMApHMCP и UrApHMCP, у оба случаја покривања. Сви предложени модели за USApHMCP и UMApHMCP су, у смислу ефикасности, упоређени са одговарајућим моделима из литературе коришћењем егзактног решавача CPLEX 12.6. Приликом поређења ових формулација, у нумеричким експериментима је коришћено неколико скупова тест примера из литературе за хаб проблеме. Добијени експериментални резултати показују да нови модели UMApHMCP за оба концепта покривања показују најбоље перформансе, у смислу квалитета решења и времена извршавања. За UrApHMCP и оба концепта покривања, предложена су три математичка модела, која су упоређена у смислу ефикасности коришћењем егзактног решавача CPLEX 12.6.

Имајући у виду сложеност сва три разматрана проблема и резултате добијене егзактним решавачем CPLEX 12.6, закључено је да егзактни решавач проналази оптимална или допустива решења само на инстанцама проблема малих димензија, док су решења проблема већих димензија недостижна за егзактни решавач. Из тог разлога, било је неопходно имплементирати адекватне хеуристичке или метахеуристичке методе које у кратком времену извршавања обезбеђују квалитетна решења инстанци проблема великих димензија. До сада су у литератури предложене једноставне, али недовољно ефикасне, хеуристичке методе за решавање проблема USApHMCP и UMApHMCP са

бинарним покривањем, док варијанте НМСП са парцијаним покривањем нису до сада решаване метахеуристичким методама. Како  $UrApHMCP$  са бинарним и парцијалним покривањем до сада није разматран у литератури, не постоје предложене методе за његово решавање. Имајући у виду бројне примере успешне примене методе променљивих околина (VNS) на различите хаб локацијске проблеме, ова метахеуристика је примењена на разматране НМСП проблеме.

У циљу ефикасног решавања разматраних НМСП проблема, у дисертацији су дизајниране и имплементирани следеће варијанте VNS методе: општа метода променљивих околина (енгл. *General Variable Neighborhood Search - GVNS*) за  $USApHMCP$ , основна метода променљивих околина (енгл. *Basic Variable Neighborhood Search - BVNS*) за  $UMApHMCP$  и варијанта опште методе променљивих околина (GVNS-R) за  $UrApHMCP$ . У случају  $UrApHMCP$ , предложене су још две метахеуристике: похлепна стохастичко-адаптивна процедура претраге са методом променљивог спуста (енгл. *Greedy Randomized Adaptive Search Procedure with Variable Neighborhood Descent - GRASP-VND*) и генетски алгоритам (енгл. *Genetic Algorithm - GA*). Конструктивни елементи свих предложених метахеуристика су прилагођени карактеристикама разматраних проблема.

У оквиру експерименталне анализе, извршена су тестирања на хаб скуповима података из литературе, која укључују инстанце проблема величине до 1000 чворова. Добијени резултати показују да предложене метахеуристике за разматране проблеме достижу сва позната оптимална решења претходно добијена CPLEX 12.6 решавачем или успостављају нова најбоља позната решења за значајно краће време извршавања, у поређењу са CPLEX 12.6 решавачем. Предложене GVNS и BVNS метахеуристике брзо достижу сва позната оптимална решења при тестирању инстанци проблема малих димензија редом за  $USApHMCP$  и  $UMApHMCP$ . У случају инстанци проблема великих димензија, које до сада нису тестиране у литератури за разматране проблеме, предложене GVNS и BVNS метахеуристике налазе решења доброг квалитета, за кратко време извршавања. Резултати тестирања предложених GVNS-R и GRASP-VND метахеуристика за  $UrApHMCP$  на инстанцама проблема већих димензија указују на њихову ефикасност, у оба случаја покривања. Предложена GA метода се показала успешном само за решавање  $UrApHMCP$  у случају бинарног покривања, на инстанцама проблема величине до 200 чворова.

Варијанте проблема хаб максималног покривања, које су разматране у овој дисертацији, од великог су теоријског и практичног значаја. Нови математички модели предложени у овој дисертацији за разматране варијанте НМСП, представљају научни допринос теорији хаб локацијских проблема, математичком моделирању и оптимизацији. Развијене и имплементирани метахеуристике за решавање посматраних варијанти НМСП представљају научни допринос области метода оптимизације за решавање локацијских проблема, као и развоју софтвера. Разматране варијанте НМСП имају бројне примене при оптимизацији телекомуникацијских и транспортних система, превозењу путника и робе у авио-саобраћају, система хитних служби, поштанских и других система испоруке, тако да се резултати добијени у овој докторској дисертацији могу применити у пракси, делимично или у потпуности.

## Приказ дисертације

Рукопис има 123 стране и обухвата пет поглавља основног текста, списак коришћене литературе од 151 референце, 26 табела, 4 слике и 9 алгоритама. Структура рукописа је следећа.

У првом, уводном, поглављу дефинисани су проблеми оптимизације, NP-тешки проблеми и изложени су основни концепти најзначајнијих егзактних и метахеуристичких метода. Затим су дефинисани хаб локацијски проблеми, наведене су основне карактеристике и изложена класификација хаб локацијских проблема по различитим критеријумима. Детаљно је описана класа проблема хаб покривања, са посебним освртом на проблеме хаб максималног покривања који су предмет ове дисертације. Дефинисани су концепти бинарног и парцијалног покривања.

У другом поглављу детаљно је описан проблем р-хаб максималног покривања неограничених капацитета са једноструким алокацијама (енгл. Uncapacitated Single Allocation p-hub Maximal Covering Problem - USApHMCP), анализирана је његова сложеност и дат је преглед релевантне литературе. Изложене су постојеће формулације за оба концепта покривања, које су у досадашњој литератури показале најбоље перформансе. Затим су предложени нови математички модели за USApHMCP са бинарним и парцијалним покривањем, чија се главна предност огледа у чињеници да обједињују моделе за проблеме р-хаб максималног покривања са различитим алокацијским шемама. Нови модели се малим модификацијама лако могу трансформисати у одговарајуће моделе са вишеструким или г-алокацијама. Из тог разлога, у дисертацији су предложени модели названи „општим моделима“. Како егзактне методе не дају решења за инстанце проблема већих димензија, у овим случајевима је неопходно користити метахеуристички приступ за решавање USApHMCP. У овом поглављу представљена је структура и детаљно су изложени елементи опште методе променљивих околина (GVNS), која је прилагођена разматраном USApHMCP са бинарним и парцијалним покривањем. Развијена GVNS метода за решавање USApHMCP је тестирана на стандардним CAB и AP хаб инстанцама до 200 чворова, али и на URAND инстанцама до 1000 чворова, које представљају прави изазов за истраживаче. Скупови AP и URAND инстанци су у овој дисертацији први пут тестирани за USApHMCP са бинарним и парцијалним покривањем. Сви добијени резултати су анализирани у погледу просечног квалитета решења, времена извршавања и стабилности алгорита. Изложени експериментални резултати показују да је предложена GVNS метода достигла сва позната оптимална решења и пронашла нова најбоља решења у односу на постојећа из литературе. Чак и у случајевима решавања инстанци проблема великих димензија, предложене хеуристике достижу најбоља решења за кратко време извршавања.

У трећем поглављу разматран је проблем р-хаб максималног покривања неограничених капацитета са вишеструким алокацијама (енгл. Uncapacitated Multiple Allocation p-hub Maximal Covering Problem - UMAPHMCP), анализирана је његова сложеност и наведен је преглед постојећих радова из литературе који се односе на овај проблем. Најпре су изложени најбољи постојећи модели UMAPHMCP за оба концепта покривања, а затим су предложене нове, опште математичке формулације проблема, које се могу применити и за бинарно и за парцијално покривање. Сви модели су упоређени у

смислу ефикасности коришћењем егзактног решавача CPLEX 12.6. Експериментални резултати показују да су нови модели за UMAPHMCP у оба случаја покривања бољи од раније предложених модела из литературе, тј. омогућавају егзактном решавачу добијање већег броја оптималних решења на тестираним инстанцама, за краће просечно време извршавања. У циљу решавања већих димензија UMAPHMCP, развијена је основна метода променљивих околина (BVNS), чија је структура детаљно описана у овом поглављу. Предложена BVNS метода за решавање UMAPHMCP је такође тестирана на CAB и AP хаб инстанцама до 200 чворова, као и на URAND инстанцама до 1000 чворова. AP и URAND инстанце су по први пут у литератури разматране у експерименталној анализи за UMAPHMCP у оба случаја покривања. На основу добијених резултата, закључено је да је предложена BVNS метода успешна при решавању UMAPHMCP, тј. достиже сва позната оптимална решења или добија нова најбоља решења за кратко време извршавања.

У четвртом поглављу уведен је нов проблем из класе HMCP, који до сада није разматран у литератури: проблем р-хаб максималног покривања неограничених капацитета са вишеструким алокацијама (енгл. Uncapacitated Multiple Allocation p-hub Maximal Covering Problem - UMAPHMCP). Након дефиниције проблема UMAPHMCP, предложени су општи математички модел за овај проблем у случају бинарног и парцијалног покривања, а затим и четвороиндексни и троиндексни модели. Сва три модела за UrAPHMCP су упоређена у смислу ефикасности коришћењем егзактног решавача CPLEX 12.6. Добијени резултати показују да је општи модел ефикаснији у односу на остала два у оба случаја покривања, јер даје решења бољег квалитета за краће време извршавања. За решавање инстанци UrAPHMCP већих димензија, предложене су три метахеуристике: нова варијанта опште VNS методе (GVNS-R), похлепна стохастичко-адаптивна процедура претраге са методом променљивог спушта (GRASP-VND) и генетски алгоритам (GA). Конструктивни елементи и параметри метахеуристичких метода су прилагођени карактеристикама UrAPHMCP, тако да предложене метахеуристике достижу оптимална или субоптимална решења (уколико оптимална нису позната), у кратком времену извршавања.

У последњем, петом поглављу, дат је закључак, наведени су научни доприноси дисертације, као и правци будућих истраживања.

## **Главни научни доприноси дисертације**

Резултати приказани у дисертацији представљају научни допринос са теоријског и практичног аспекта областима оптимизације, математичког моделирања, метахеуристичких метода и операционих истраживања. Допринос областима оптимизације и математичког моделирања се огледа у предложеним новим математичким моделима USArHMCP и UMAPHMCP са бинарним и парцијалним покривањем, као и дефинисању новог проблема UrAPHMCP са оба концепта покривања, за који су предложене адекватне математичке формулације. Дизајн и имплементација неколико метахеуристичких метода прилагођених разматраним проблемима представљају допринос области метахеуристичких метода. Развијени софтвери се могу применити у реалним транспортним и телекомуникацијским системима, што представља допринос области операционих истраживања.

Прецизније, научни доприноси истраживања приказаних у рукопису су следећи:

- Формулисање нових математичких модела за проблеме  $p$ -хаб максималног покривања неограничених капацитета са једноструким и вишеструким алокацијама (USAрНМСП и UМАрНМСП) и оба концепта покривања - бинарно и парцијално;
- Формулисање проблема  $p$ -хаб максималног покривања неограничених капацитета са  $r$ -алокацијском шемом (UrАрНМСП), који до сада није разматран у литератури;
- Креирање математичких модела за UrАрНМСП за оба типа покривања - бинарно и парцијално;
- Упоређивање познатих и нових формулација за USAрНМСП и UМАрНМСП у смислу ефикасности;
- Упоређивање предложених формулација за UrАрНМСП у смислу ефикасности;
- Испитивање домета егзактних алгорита имплементираних у оквиру решавача CPLEX 12.6 за добијање оптималних решења или њихових горњих граница на инстанцама проблема различитих димензија;
- Имплементација више варијанти методе променљивих околина, хибридне GRASP методе и генетског алгорита, прилагођених разматраним проблемима и примењених на оригиналан начин;
- Анализа резултата различитих варијанти VNS, GRASP-VND и GA метахеуристика имплементираних на хаб инстанцама из литературе, малих, средњих и великих димензија;
- Поређење добијених резултата различитих варијанти VNS, GRASP-VND и GA метода на тестираним инстанцама, као и поређење са оптималним и субоптималним решењима добијеним егзактним решавачем CPLEX 12.6;
- Развијени софтвери се могу употребити у пракси у реалним транспортним и телекомуникацијским системима.

## Научни радови кандидата

Оригинални резултати кандидата који се односе на проблематику докторске дисертације публиковани су у радовима:

- [1] **Janković, O.**, Mišković, S., Stanimirović, Z., Todosijević, R., "Novel formulations and VNS-based heuristics for single and multiple allocation  $p$ -hub maximal covering problems", *Annals of Operations Research*, 2017, Vol. 29, No.1-2, pp. 191-206, DOI: 10.1007/s10479-017-2508-1. (M22, IF 2017 1.864)
- [2] **Janković, O.**, "An efficient genetic algorithm for the uncapacitated  $r$ -allocation  $p$ -hub maximal covering problem", *Yugoslav Journal of Operations Research*, 2018, Vol. 28, No. 2, pp. 201-218, 2018. (M51)
- [3] **Janković, O.**, Stanimirović, Z., "A general variable neighborhood search for solving the uncapacitated  $r$ -allocation  $p$ -hub maximal covering problem", *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, Vol. 58C, 2017, pp. 23-30, DOI: 10.1016/j.endm.2017.03.004.
- [4] **Janković, O.**, "Solving the uncapacitated  $r$ -allocation  $p$ -hub maximal covering problem using genetic algorithm", *Proceedings of the XLIII Symposium on Operational Research-SYMOPIs 2016*, Tara, September 20-23. 2016, ISBN 978-86-335-0535-2, pp. 287-291. (M33).

Остале публикације кандидата:

- [1] Obradović, S., Lojanica, N., **Janković, O.**, "The influence of economic growth on regional disparities: Empirical evidence from OECD countries", *Proceedings of Rijeka Faculty of Economics: Journal of Economics and Business*, 34 (1), 2016, pp. 161-186. (M23, IF 2015 0.346)
- [2] **Janković, O.**, "'Successive shortest path algorithm' za rešavanje problema protoka sa minimalnom cenom", *Matematičko-statistički modeli i informaciono-komunikacione tehnologije u funkciji razvoja sistema*, Ekonomski fakultet Univerziteta u Kragujevcu, 2013, str. 201-219. (M45)
- [3] **Janković, O.**, "'Cycle-canceling algorithm' za rešavanje problema protoka sa minimalnom cenom", *Zbornik radova III simpozijuma Matematika i primene*, Beograd, 2012, str. 111-115. (M63)
- [4] **Janković, O.**, Drenovak, M., "Primena talasića u analizi ekonomskih i finansijskih podataka", *Unapređenje konkurentnosti privrede Republike Srbije*, Ekonomski fakultet Univerziteta u Kragujevcu, ISBN 978-86-6091-067-9, 2016, str. 531-548. (M45)
- [5] **Janković, O.**, "Linear Programming and its Applications, Eiselt, H. A., & Sandblom, C.-L. (2007)", prikaz knjige, *Ekonomski horizonti*, 16 (1), 2014, str.77-79.
- [6] Drenovak, M., **Janković, O.**, "Investibilni indeksi državnog duga evro zone: efikasan način diversifikacije za male institucionalne investitore", *Ekonomsko-socijalni aspekti priključivanja Srbije EU 2015*, Ekonomski fakultet Univerziteta u Kragujevcu, ISBN: 978-86-6091-059-4, 2015, str. 583-596. (M45)

## Закључак

У рукопису „Проблеми хаб максималног покривања - нови математички модели и методе решавања“, кандидаткиња Оливера Станчић је показала широко и систематично знање из области оптимизације, математичког моделирања и метахеуристичких метода. Разматрани рукопис садржи важан научни допринос и значајне оригиналне резултате за решавање три варијанте проблема хаб максималног покривања: проблем р-хаб максималног покривања неограничених капацитета са једноструким алокацијама, проблем р-хаб максималног покривања неограничених капацитета са вишеструким алокацијама и проблем р-хаб максималног покривања неограничених капацитета са г-алокацијском шемом, при чему су за сва три проблема анализирана оба концепта покривања - бинарно и парцијално. Својим радом на дисертацији кандидаткиња Оливера Станчић је показала висок степен научне и истраживачке зрелости, као и оспособљеност за самосталан и тимски рад на решавању теоријских и практичних проблема.

На основу свега наведеног, предлагемо Наставно-научном већу Математичког факултета Универзитета у Београду, да рукопис „Проблеми хаб максималног покривања - нови математички модели и методе решавања“, кандидаткиње Оливере Станчић, прихвати као докторску дисертацију и одреди комисију за јавну одбрану.

У Београду,

16. 10. 2018. године

---

(др Зорица Станимировић, ванредни професор -  
ментор)

---

(др Милан Дражић, ванредни професор)

---

(др Татјана Давидовић, научни саветник Математичког  
института САНУ)