УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Марија Боричић

Вероватносни рачуни секвената и класификација некласичних логика заснована на ентропији

Докторска дисертација

Београд, 2016.

UNIVERSITY OF BELGRADE

FACULTY OF MATHEMATICS

Marija Boričić

Probability sequent calculi and entropy based non-classical logics classification

Doctoral dissertation

Belgrade, 2016

Подаци о ментору и члановима комисије

Ментор

др Небојша Икодиновић, доцент
Математички факултет, Универзитет у Београду

Чланови комисије

др Милан Божић, ванредни професор
Математички факултет, Универзитет у Београду

др Зоран Огњановић, научни саветник
Математички Институт САНУ, Београд

др Зоран Марковић, научни саветник
Математички Институт САНУ, Београд

Датум одбране:

Подаци о докторској дисертацији

Наслов докторске дисертације

Вероватносни рачуни секвената и класификација некласичних логика заснована на ентропији

Резиме

После кратког уводног прегледа, рад је подељен на два дела. Први део се бави присуством вероватноће у логици (в. [16], [17], [18], [19], [22], [23] и [24]), а други је посвећен примени ентропије у класификацији поливалентних логика (в. [14], [15], [20], [21] и [25]).

Основна идеја која доминира првим делом рада јесте обогаћивање Gentzen–овог рачуна секвената класичне логике исказа једним вероватносним оператором дефинисаним над секвентима $\Gamma \vdash \Delta$ како би се изразила чињеница да "вероватноћа истинитости секвента $\Gamma \vdash \Delta$ припада интервалу $[a, b] \subseteq [0, 1]$". Уводимо следеће системе: **LKprob**, **LKprob**(ε), **NKprob** и **LKfuzz**. Основна форма секевната у систему **LKprob** је $\Gamma \vdash_a^b \Delta$ са горе датим значењем. Систем **LKprob**(ε) се фокусира на Suppes–ове форме $\Gamma \vdash^n \Delta$ које омогућавају формализацију реченице "вероватноћа истинитости секвента $\Gamma \vdash \Delta$ припада интервалу $[1 - n\varepsilon, 1] \subseteq [0, 1]$", за неки $n \in \mathbf{N}$. Систем **NKprob** представља природно–дедукцијски аналогон рачуну секвената **LKprob**. Модели засновани на Carnap–Popper–Leblance–овој семантици дефинисани су за сваки од ових рачуна уз одговарајуће резултате сагласности и потпуности. Коначно, рачун **LKfuzz** је уведен са општијом формом секвената $\Gamma \vdash_x \Delta$, где је x елемент коначне мреже, са циљем да се опише једно расплинуће рачуна **LK**. Значење секвента $\Gamma \vdash_x \Delta$ је "да је x мера расплинућа секвента $\Gamma \vdash \Delta$". Модели за **LKfuzz** су дати са резултатима сагласности и потпуности, а доказ–теоретски третман рачуна **LKfuzz** укључује и теорему елиминације сечења.

Други део рада истражује чињеницу да сваки логички систем повезан са партицијом индукованом одговарајућом Lindenbaum–Tarski–јевом алгебром омогућава дефинисање његове ентропије. Дефинишемо ентропију логичког система базираној на геометријској расподели мера над одговарајућом партицијом скупа формула. Ова дефиниција омогућава класификацију поливалентних исказних логика у односу на њихову ентропију. Асимптотске апроксимације ентропије неких бесконачновалентних логика су такође дате. Размотрени примери укључују Lukasiewicz–еву, Kleene–јеву и Priest–ову тровалентну логику, Belnap–ову четворовалентну логику, Gödel–ове и McKay–еве m–валентне логике, и Heyting–ову и Dummett–ову бесконачновалентну логику.

Кључне речи

Вероватносне логике, рачун секвената, модел, сагласност, потпуност, некласичне логике, расплинуте логике, елиминација сечења, класична двовалентна ислазна логика, поливалентне исказне логике, Lindenbaum–Tarski–јева алгебра, партиција, логички систем, мера неодређености, ентропија, класификација.

Научна област

Математика

Ужа научна област

Математичка логика

УДК број

510.647 + 510.644 + 519.223(043.3)

Dissertation data

Doctoral dissertation title

Probability sequent calculi and entropy based non-classical logics classification

Abstract

After a brief introductory survey, this work is divided into two parts. The first part deals with presence of probability in logic (v. [16], [17], [18], [19], [22], [23] and [24]), and the second one is devoted to the application of entropy in classification of many–valued logics (v. [14], [15], [20], [21] and [25]).

The basic idea, dominant in the first part of the work, is to enrich the Gentzen's sequent calculus **LK** for propositional classical logic by a kind of probability operator defined over the sequents $\Gamma \vdash \Delta$ in order to express the fact that "the truthfulness probability of $\Gamma \vdash \Delta$ belongs to the interval $[a, b] \subseteq [0, 1]$". We introduce the following four systems: **LKprob**, **LKprob**(ε), **NKprob** and **LKfuzz**. The basic form of sequents in **LKprob** is $\Gamma \vdash_a^b \Delta$ with the above given intended meaning. The system **LKprob**(ε) is focused on the Suppes' forms $\Gamma \vdash^n \Delta$ enabling to formalize the sentence "the truthfulness probability of $\Gamma \vdash \Delta$ belongs to the interval $[1 - n\varepsilon, 1] \subseteq [0, 1]$", for some $n \in \mathbf{N}$. The system **NKprob** presents a natural deduction counterpart of the sequent calculus **LKprob**. The models founded on Carnap–Popper–Leblance probability semantics are defined for each of these calculi and accompanied by the corresponding soundness and completeness results. Finally, the calculus **LKfuzz** is introduced with a more general form of the sequents $\Gamma \vdash_x \Delta$, where x is an element of a finite lattice, with the aim to describe a fuzzification of **LK**. The meaning of $\Gamma \vdash_x \Delta$ is that "x is the fuzziness measure of $\Gamma \vdash \Delta$". Models for **LKfuzz** are given with soundness and completeness results, and a proof–theoretical treatment of **LKfuzz** includes the cut–elimination theorem.

The second part of the work explores the fact that each logical system associated with the partition induced by the corresponding Lindenbaum–Tarski algebra makes it possible to define its entropy. We define the entropy of a logical system based on geometric distribution of measures over matching partition of set of formulae. This definition enables the classification of many–valued propositional logics according to their entropies. Asymptotic entropy approximations for some infinite–valued logics are proposed as well. The considered examples include Lukasiewicz's, Kleene's and Priest's three–valued logics, Belnap's four–valued logic, Gödel's and McKay's m–valued logics, and Heyting's and Dummett's infinite–valued logics.

Keywords

Probability logic, sequent calculus, model, soundness, completeness, non–classical logics, fuzzy logics, cut–elimination, classical two–valued propositional logic, many–valued propositional logics, Lindenbaum–Tarski algebra, partition, logical system, uncertainty measurement, entropy, classification.

Scientific field

Mathematics

Scientific subfield

Mathematical logic

UDC number

510.647 + 510.644 + 519.223(043.3)

Садржај

Предговор

Овај рад, поред стандардног Увода и Закључка, садржи две целине. Једна се односи на вероватносне рачуне секвената, а друга на ентропију логичког система, па је његов алтернативни наслов могао да гласи *Вероватноћа дедукције и ентропија логике.* Структура рада стриктно следи пријаву тезе прихваћену од стране Наставно–научног већа Математичког факултета и Већа природно–математичких наука Универзитета у Београду.

У уводном делу се дају сви неопходни елементи за праћење главних резултата изложених у другом и трећем делу рада и тичу се рачуна секвената и природних дедукција, вероватносних логика, расплинутих и поливалентних логика, и ентропије.

Други део рада се бави најпре увођењем вероватносних проширења **LKprob** и **LKprob**(ε) Gentzen–овог рачуна секвената класичне логике исказа **LK** (в. [47], [63], [108]), а затим и вероватносним рачуном природних дедукција **NKprob** инспирисаним Gentzen–овим рачуном **NK** (в. [47], [94]), као и рачуном секвената расплинуте логике **LKfuz** заснованом такође на рачуну **LK**. Полази се од модела дефинисаних у радовима Carnap–а, Popper–а и Leblanc–а (в. [28], [93], [65], [66] и [67]) и доказују се теореме сагласности и потпуности за рачуне **LKprob**, **LKprob**(ε) и **NKprob**. Неки од ових резултата су или ће бити објављени у самосталним ауторовим радовима [18] и [24], и саопштени на међународним и националним научним конференцијама (в. [16], [17], [19] и [22]). За рачун **LKfuz** дефинисана је одговарајућа семантика у односу на коју су доказане теореме сагласности и потпуности, као и теорема о елиминацији правила сечења.

У трећем делу рада се дефинише појам ентропије логичког система и демонстрира његова примена у класификацији појединих познатих коначновалентних исказних логика, укључујући и асимптотске процене ентропије неких од познатих бесконачновалентних исказних логика. Ови резултати су такође објављени у самосталним ауторовим радовима [14] и [25], и саопштени на међународним и националним научним конференцијама (в. [15], [20] и [21]).

Овом приликом аутор захваљује члановима Семинара за вероватносне логике и Семинара за логику Математичког института САНУ, М. Рашковићу, З. Марковићу, М. Божићу, С. Гхилезан, З. Петрићу, А. Перовићу и Д. Додеру, на корисним дискусијама током излагања делова овог рада на семинарима и конференцијама. Аутор посебну захвалност изражава својим менторима З. Огњановићу и Н. Икодиновићу на подршци и низу корисних сугестија током писања овог рада.

1

Увод

У овом уводном делу рада, кроз кратке есеје о рачунима секвената, вероватносним, расплинутим и поливалентним логикама, и ентропији, дајемо оквир и прецизирамо неке од појмова на којима се темеље преостала два дела рада, без амбиција да дубље анализирамо већ познате, и одавно присутне у литератури, резултате и концепте.

1.1 О рачунима секвената и природних дедукција

Један уобичајен и доминантно присутан у литератури начин синтаксног представљања логичких система најчешће се везује за Hilbert–ово име и подразумева коначне спискове схема аксиома и правила извођења (в. [63]).

Класична логика исказа, суштински заснована на Аристотеловом принципу двовалентности, уводи се над исказним језиком.

Дефиниција 1.1.1. *Исказни језик се састоји од симбола за: (1) исказна слова: $p_1, p_2, ...$, (2) исказне везнике: $\neg$, $\wedge$, $\vee$ и $\rightarrow$, и (3) заграде:) и (. Скуп исказних формула For је дефинисан индуктивно као најмањи скуп који садржи сва исказна слова и затворен је за следеће правило: ако су A и B исказне формуле, онда су $(\neg A)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ и $(A \rightarrow B)$ такође исказне формуле.*

Обично се везник еквиваленције $(A \leftrightarrow B)$ уводи као скраћеница за $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$, и претпостављају се уобичајене конвенције о изостављању појединих заграда, као, на пример, да уместо формула $(((\neg A) \wedge B) \to (C \vee (\neg D)))$, $(A \to (B \to C))$ и $((A \to B) \leftrightarrow (C \wedge D))$, респективно пишемо $\neg A \wedge B \to C \vee \neg D$, $A \to B \to C$ и $(A \to B) \leftrightarrow C \wedge D$.

Систем **C** класичне логике исказа Hilbert–овог типа може се представити следећом листом схема аксиома:

$(A1)$ $A \to B \to A$

$(A2)$ $(A \to B \to C) \to (A \to B) \to A \to C$

$(A3)$ $((A \to B) \to A) \to A$

$(A4)$ $A \to (B \to A \wedge B)$

$(A5)$ $A \wedge B \to A$

$(A6)$ $A \wedge B \to B$

$(A7)$ $A \to A \vee B$

$(A8)$ $B \to A \vee B$

$(A9)$ $(A \to C) \to (B \to C) \to (A \vee B \to C)$

$(A10)$ $A \to \neg A \to B$

и јединственим схема правилом извођења *modus ponens*:

$$\frac{A \quad A \to B}{B} \ (mp)$$

Наведена аксиоматика потиче од Kleene–ja (в. [63]) и има својства која омогућавају одвојено третирање сваког исказног везника.

Релацију дедукције, у ознаци $\vdash$, дефинишемо овако:

Дефиниција 1.1.2. *$\Gamma \vdash A$ акко постоји коначан низ формула $A_1, ..., A_n$ такав да је $A_n = A$ и свака формула A_i $(1 \leq i \leq n)$ овог низа задовољава један од ледећих услова: (i) A_i је аксиома; (ii) $A_i \in \Gamma$; или (iii) A_i следи, по правилу modus ponens, из неке две формуле скупа $\{A_1, ..., A_{i-1}\}$. Тада још кажемо и да A следи из скупа хипотеза Γ. Ако је $\Gamma = \emptyset$, кажемо да је A доказива, или да је теорема, што означавамо са $\vdash A$.*

Овако уведена релација дедукције $\vdash$ може се алгебарски посматрати као бинарна релација над скупом $\mathcal{P}(\mathrm{For}) \times \mathrm{For}$, где смо са $\mathcal{P}(\mathrm{For})$ означили партитиван скуп скупа For свих исказних формула, која, евидентно, има следећа својства:

(i) идентитет: $\{A\} \vdash A$;

(ii) слабљење (или монотоност): ако $\Gamma \vdash A$, онда $\Gamma \cup \{B\} \vdash A$, и

(iii) хипотетички силогизам (или транзитивност): ако $\Gamma \vdash A$ и $\Pi \cup \{A\} \vdash B$, онда $\Gamma \cup \Pi \vdash B$ (в. [1], [10], [45]).

Релација дедукције са својстима *(i)*, *(ii)* и *(iii)* најчешће се везује за Tarski–јево име (в. [109]), а оваква релација дедукције, када је још затворена за супституцију, у потпуности може окарактерисати одговарајућу исказну логику (в. [1]), односно са њом се идентификовати.

Као алтернативе Hilbert–овом начину представљања логичких система Gentzen (в. [47], [94], [106], [108]) уводи рачуне секвената и системе природних дедукција, чији ћемо краћи приказ овде дати у функцији делова текста који следе.

Рачун секвената класичне логике исказа **LK** се формулише на исказном језику проширеном једним новим симболом $\vdash$. Није случајно што овде користимо исти симбол као симбол за релацију дедукције, јер се рачун секвената може посматрати и као својеврсна формализација релације дедукције. Полази се од скупа W(For) свих речи формираног индуктивно над скупом исказних формула For, укључујући и празну реч. Основни објекат рачуна секвената је форма облика $\Gamma \vdash \Delta$, тзв. секвент, где су Γ и Δ речи. Речи Γ и Δ секвента $\Gamma \vdash \Delta$ се, редом, називају *антецеденс* и *консеквенс* посматраног секвента.

Рачун секвената **LK** (в. [47], [106], [108]) класичне логике исказа се састоји од јединствене аксиоме:

$$p \vdash p$$

где је p било које исказно слово, и следећих структурних правила извођења:

$$\frac{\Gamma AB\Pi \vdash \Delta}{\Gamma BA\Pi \vdash \Delta}\ (P\vdash) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta AB\Lambda}{\Gamma \vdash \Delta BA\Lambda}\ (\vdash P)$$

$$\frac{\Gamma AA \vdash \Delta}{\Gamma A \vdash \Delta}\ (C\vdash) \qquad \frac{\Gamma \vdash AA\Delta}{\Gamma \vdash A\Delta}\ (\vdash C)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma A \vdash \Delta}\ (W\vdash) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash A\Delta}\ (\vdash W)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A\Delta \quad A\Pi \vdash \Lambda}{\Gamma\Pi \vdash \Delta\Lambda}\ (\text{цут})$$

и логичких правила извођења:

$$\frac{\Gamma \vdash A\Delta}{\Gamma\neg A \vdash \Delta}\ (\neg\vdash) \qquad \frac{\Gamma A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A\Delta}\ (\vdash\neg)$$

$$\frac{\Gamma A \vdash \Delta}{\Gamma A \wedge B \vdash \Delta},\ \frac{\Gamma B \vdash \Delta}{\Gamma A \wedge B \vdash \Delta}\ (\wedge\vdash) \qquad \frac{\Gamma \vdash A\Delta \quad \Gamma \vdash B\Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B\Delta}\ (\vdash\wedge)$$

$$\frac{\Gamma A \vdash \Delta \quad \Gamma B \vdash \Delta}{\Gamma A \vee B \vdash \Delta}\ (\vee\vdash) \qquad \frac{\Gamma \vdash A\Delta}{\Gamma \vdash A \vee B\Delta},\ \frac{\Gamma \vdash B\Delta}{\Gamma \vdash A \vee B\Delta}\ (\vee\vdash)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A\Delta \quad \Pi B \vdash \Lambda}{\Gamma\Pi A \to B \vdash \Delta\Lambda}\ (\to\vdash) \qquad \frac{\Gamma A \vdash B\Delta}{\Gamma \vdash A \to B\Delta}\ (\vdash\to)$$

Докази у рачуну **LK** имају форму дрвета чији се иницијални чворови састоје од инстанци аксиома, а свако гранање се одвија у складу са одговарајућим правилом рачуна **LK**.

Рачун **LK** представља скуп правила која у потпуности дефинишу међсобне односе релације дедукције $\vdash$ и исказних везника, а која треба да обезбеде да се секвент $A_1 \dots A_m \vdash B$ може схватити као чињеница $\{A_1, \dots, A_m\} \vdash B$ у одговарајућој формулацији рачуна типа Hilbert–а, односно секвент $A_1 \dots A_m \vdash B_1 \dots B_n$ као $\{A_1, \dots, A_m, \neg B_1, \dots, \neg B_{n-1}\} \vdash B_n$. Прецизније, основну синтаксну интерпретацију секвента $\Gamma \vdash \Delta$ представља формула $\bigwedge \Gamma \to \bigvee \Delta$, где $\bigwedge \Gamma$ и $\bigvee \Delta$ представљају, редом, конјункциу и дисјункцију свих формула из Γ и Δ. Посебно, $\vdash \Delta$ се интерпретира као $\bigvee \Delta$, $\Gamma \vdash$ као $\neg \bigwedge \Gamma$, а $\vdash$ као апсурд. Семантички посматрано секвент $\Gamma \vdash \Delta$ ће бити задовољен у неком моделу уколико нека формула из Γ није задовољена у том моделу или уколико нека формула из Δ јесте задовољена у том моделу.

У јединственој аксиоми рачуна **LK** и структурним правилима слабљења антецеденса $(W \vdash)$ и сечења (cut) препознајемо особине идентитета, слабљења и хипотетичког силогизма релације дедукције везане за Hilbert–ов тип формулације класичне логике исказа **C**. Прецизније посматрање релације $\vdash$ у рачуну **LK** захтева нешто другачији пиступ у којем је, очигледно, $\vdash \subseteq \mathrm{W(For)} \times \mathrm{W(For)}$ (в. [1], [10]).

Ипак твђење које непосредније повезује класичну логику исказа **C** представљену рачуном типа Hilbert–а и рачун секвената **LK** (в. [47], [63], [108]) може се исказати на следећи начин:

Теорема 1.1.3. *Секвент* $\Gamma \vdash \Delta$ *је доказив у рачуну* **LK** *акко је његова интерпретација* $\bigwedge \Gamma \to \bigvee \Delta$ *доказива у класичном рачуну исказа* **C**.

Доказ. Индукцијом по дужини доказа секвента $\Gamma \vdash \Delta$ у рачуну **LK**, односно по дужини доказа формуле $\bigwedge \Gamma \to \bigvee \Delta$ у класичном рачуну исказа **C** (в. [47], [63], [108]). $\Box$

Опште везе између Hilbert–овог, или боље речено Tarski–jевог (в. [109]), с једне, и Gentzen–овог приступа релацији дедукције, с друге стране, представљају и даље савремену тему за расправе (в. [44], [45], [98]). Посебно је широко поље истраживања алгебарских својстава релације дедукције (в. [1], [10], [109], [119]) карактеристично, у једном дужем периоду, за пољску логичку школу (в. [107], [118], [119]).

Систем природних дедукција **NK** класичне логике исказа, како га је увео Gentzen (в. [47]) и касније развијао Prawitz (в. [94]) базиран је на следећим правилима извођења која се односе на импликацију:

$$\frac{\overline{\overline{[A]}}\atop B}{A \to B}(I \to) \qquad \frac{A \quad A \to B}{B}(E \to)$$

конјункцију:

$$\frac{A \qquad B}{A \wedge B}(I\wedge) \qquad \frac{A \wedge B}{A}, \ \frac{A \wedge B}{B}\ (E\wedge)$$

дисјункцију:

$$\frac{A}{A \vee B}, \ \frac{B}{A \vee B}\ (I\vee) \qquad \frac{A \vee B \quad {\overline{\overline{[A]}} \atop C} \quad {\overline{\overline{[B]}} \atop C}}{C}(E\vee)$$

и негацију:

$$\frac{\bot}{A}(\bot) \qquad \frac{\overline{\overline{[\neg A]}} \atop \bot}{A}(RAA)$$

где је $\bot$ ознака за константу апсурда преко које се негација дефинише као: $\neg A = A \to \bot$.

У односу на уобичајене формулације типа Hilbert–а, горњи систем захтева коментар правила $(I \to)$, $(E\vee)$ и (RAA), у којима се појављује форма облика

$$\overline{\overline{[A]}} \atop B$$

која означава део извођења закључка B из скупа претпоставки који је можда садржао и формулу A у којем се, на крају, закључак $A \to B$ третира као закључак који је изведен из скупа претпоставки који не мора садржати формулу A.

Твђење које успоставља везу између система природних дедукција **NK** и рачуна секвената **LK** (в. [47], [94]) формулише се на следећи начин:

Теорема 1.1.4. *Секвент $\Gamma \vdash A$ је доказив у рачуну* **LK** *акко у систему* **NK** *је могуће доказати да се из скупа хипотеза Γ може извести закључак A.*

Доказ. Индукцијом по дужини доказа секвента $\Gamma \vdash A$ у рачуну **LK**, односно по дужини извођења формуле A из скупа хипотеза Γ систему природних дедукција **NK** (в. [47], [94]). □

Аспект система природних дедукција који ће нама бити интересантан у наставку јесте да је то систем који омогућава потпуну синтаксну манипулацију са формулама која подразумева могућност увођења (I—правила) и елиминације (E—правила) сваког исказног везника.

Увођење рачуна секвената и система природних дедукција у логику, као чисто синтаксних средстава, имало је за последицу утемељивање једне сасвим нове логичке дисциплине — теорије доказа, чија су централна тврђења теореме о елиминацији правила сечења и теореме нормализације, са бројним последицама. Како је сврха помињања оваквих формулација логичих система у нашем раду потпуно друге природе, ми се на овим тврђењима карактеристичним за теорију доказа нећемо детаљније задржавати. Наиме, наш је циљ да рачун секвената непосредно повежемо са појмом вероватноће и да развијемо један вероватносни систем извођења, те да све то оправдамо јасном семантичком аргументацијом оличеном у одговарајућим теоремама сагласности и потпуности.

Навешћемо само формулацију славне Gentzen–ове теореме о елиминацији сечења са њеним најнепосреднијим последицама (в. [47], [63], [108]), без бављења њеним доказом:

Теорема 1.1.5. ***Теорема о елиминацији сечења. (Cut–elimination Theorem)*** *Ако је секвент $\Gamma \vdash \Delta$ доказив у рачуну* **LK**, *онда је $\Gamma \vdash \Delta$ доказив у* **LK** *без коришћења правила сечења.*

Непосредним посматрањем правила извођења рачуна **LK** можемо приметити да свако правило, осим правила сечења, има следеће својство: *ако се нека* *формула појављује у секвентима правила са горње стране црте, онда се она појављује као подформула у секвенту са доње стране црте.* Ово својство је познато у литератури као *својство подформуле (subformula property)* и игра кључну улогу у трагању за доказом неког секвента. На овом својству се базирају докази и синтаксне процедуре одлучивости рачуна секвената класичне **LK** и интуиционистичке **LJ** логике исказа. Занимљиво је да се интуиционистички рачун секвената **LJ** може добити из рачуна **LK** следећом једноставном рестрикцијом која се уводи на секвенте: у консеквенсу сваког секвента појављује се највише једна формула.

Овај део завршавамо напоменом о присуству тзв. означених секвената у теорији логичких система. Наиме, једна од најдубљих анализа релације дедукције формализоване у Gentzen–овим рачунима секвената уследила је коришћењем апаратуре теорије категорија (в. [75]) у којој се сваки секвент посматра (и именује) као једна категорија, што доводи до појма означеног секвента (labelled sequent) и могућности кодирања (и декодирања) доказа посматраног секвента (в. [34]). У таквом контексту могуће је другачије, уз наглшену примену алгебарске методологије, посматрање процеса нормализације доказа и елиминације сечења из доказа неког секвента (в. [106]). Концепт означене релације дедукције и дедуктивног система (labelled deductive system) је распрострањен и изван рачуна секвената и он, по правилу, обједињује синтаксу једне логике и њену (често сасвим традиционалну) семантику (моделе). Овакав приступ баца ново светло на већ познате системе и најчешће се примењује на модалне логике и некласичне исказне логике у спрези са одговарајућим Kripke–овим моделима (в. [44], [113]). Инспирисани оваквим начином представљања логичких система дошли смо до 'вероватносног секвента' који је означен интервалом $[a, b] \subseteq [0, 1]$ и који представља усаглашено и експлицитно изражавање вероватноће једног секвента, о чему ће бити речи детаљније у деловима 2.1 и 2.2 овог рада који се баве вероватносним рачунима секвената. У делу 2.4 развијамо рачун означених секвената у циљу дефинисања једног рачуна секвената расплинуте логике, где ознаке секваната интерпретирамо као контексте у којима може нека узрочно–последична веза да се дедукује.

1.2 О вероватносним логикама

Поред потпуног и темељног прегледа З. Огњановића, М. Рашковића и З. Марковића [89] развоја идеје о повезивању појма исказа и појма вероватноће и, такође прегледних чланака Fenstad–a [38] и Williamson–a [117], покушаћемо овде да дамо, комплементарно, само оне елементе овог повезивања које је у функцији истраживања која следе.

Традиционални приступ вероватносним исказним логикама могао би се посматрати, аналогно исказним модалним логикама (в. [29]), као логички систем над језиком исказа проширеним највише пребројивом листом вероватносних оператора који има за циљ да омогући адекватну формализацију семаничког садржаја који изражава став да "вероватноћа исказа A припада интервалу $[a, b] \subseteq [0, 1]$". Синтаксна бављења овом темом налазимо још у радовима Boole–a [13], Keynes–a [61], филозофско–семантичка код Venn–a [111] и [112], Carnap–a [28], Popper–a [93] и Adams–a [2] и [3], док семантичко–синтаксна разматрања имамо код Hailperin–a (в. [51], [52] и [53]) и Leblanc–a (в. [65], [66] и [67]) са резултатима потпуности, што је омогућило и инспирисало низ резултата, међу којима овом приликом истичемо ауторе окупљене око Семинара за вероватносне логике Математичког института САНУ (в. [89], [87], [99], [57], [33], [14], [15], [16], [17], [18], [90], [24], [25]).

Типичан приступ формалном третирању вероватноће једног исказа, следећи, на пример, [52] или, више у духу полимодалних логика, као у [87], полази од проширења језика исказне логике коначном листом вероватносних оператора $P_{\geq r}$, $r \in I \subseteq [0, 1]$, где је I коначан скуп који садржи 0 и 1, а скуп формула се дефинише индуктивно додатним условом: ако је A формула, онда је, за сваки $r \in I$, $P_{\geq r}(A)$ такође формула. Значење формуле $P_{\geq r}(A)$ је "вероватноћа од A једнака је или већа од r".

Списак аксиома које дефинишу понашање вероватносних оператора и који се додаје на аксиоме класичне логике исказа најчешће садржи аналогоне Колмогоровљевих аксиома вероватноће:

$(P1)$ $P_{\geq 0}(A)$

$(P2)$ $P_{\geq s}(A) \to P_{\geq r}(A)$, за $s \geq r$

$(P3)$ $P_{\geq s}(A) \wedge P_{\geq r}(A) \wedge P_{\geq 1}(\neg A \vee \neg B) \to P_{\geq \min(1, r+s)}(A \vee B)$

где свакако препознајемо особине ненегативности, монотоности и адитивности. Присутна је и једна форма модалног правила извођења нужности (в. [29]) према којем из $\vdash A$ можемо извести $\vdash P_{\geq 1}(A)$ (в. [52], [99], [87]).

Семантику овакве логике чине услови који су углавном присутни у радовима Carnap–а [28] и Popper–а [93], за чије се приступе овој проблематици, испоставило да су истоветни (в. [65], [66], [67]). Наиме, полази се од следећих услова које треба да задовољи функција на скупу исказних формула:

(i) $p(\top) = 1$ и $p(\bot) = 0$;

(ii) ако $p(A \wedge B) = 0$, онда $p(A \vee B) = p(A) + p(B)$;

(iii) ако $\vdash A \leftrightarrow B$ у класичној логици, онда $p(A) = p(B)$.

Модели су, по правилу, скупови могућих светова, а релација задовољења се дефинише слично као и у модалним логикама (в. [29]), уз карактеристично везивање задовољења вероватносне формуле $P_{\geq r}(A)$ за услов

$$p\{x|x \models A\} \geq r$$

означавајући да је мера свих светова у којима је формула A задовољена већа или једнака од r. Овакав приступ омогућава разматрање комбиновања вероватносних аксиома и са некласичним логикама (в. [72] и [73]).

Везу између синтаксе и семантике успостављају резултати сагласности и потпуности. Сагласност подразумева да ће свака формула која је доказива у (вероватносној) логици бити и задовољена у сваком моделу, а потпуност, обрнуто, да ће свака формула која је задовољена у сваком моделу бити и доказива у посматраној логици.

У раду [37] разматра се језик у коме је могуће изразити реченице облика "вероватноћа догађаја A је већа од 0.5" или "вероватноћа догађаја A је бар три пута мања од вероватноће догађаја B". Аутори разликују два случаја — први где су сви догађаји мерљиви скупови, и други, који се чешће јавља у пракси и који представља централни део рада, где не морају сви догађаји бити мерљиви скупови. Дефинишу се тзв. основне тежинске формуле које представљају линеарне комбинације облика $a_1 w(A_1) + \ldots a_n w(A_n) \geq c$, где су $a_1, \ldots, a_n, c \in \mathbf{Z}$, док тежинску формулу представљају буловске комбинације основних тежинских формула. Модели се дефинишу као структуре $\mathcal{M} = (S, \mathcal{X}, \mu, \pi)$, где је $(S, \mathcal{X}, \mu)$ простор вероватноћа, а π сваком стању $s \in S$ и сваком исказном слову p придружује једну од две истинитосне вредности означену са $\pi(s)(p)$. Ако је $A^{\mathcal{M}} = \{s \in S | \pi(s)(p) = \top\}$, онда је релација задовољења дефинисана на следећи начин:

$$\mathcal{M} \models a_1 w(A_1) + \ldots a_n w(A_n) \geq c \text{ акко } a_1\mu(A_1) + \cdots + a_n\mu(A_n) \geq c,$$

а затим се релација задовољења продужава на тежинске фопрмуле на уобичајени начин: $\mathcal{M} \models \neg A$ акко није $\mathcal{M} \models A$, и $\mathcal{M} \models A \wedge B$ акко $\mathcal{M} \models A$ и $\mathcal{M} \models B$. У наставку даје се аксиоматизација једног система вероватносне логике, која се састоји од три групе аксиома — оне које се односе на исказно закључивање, затим на системе линеарних неједначина и коначно оне које се тучу вероватноће. Дати систем је потпун у односу на приказане моделе, а цео приступ има сличности са приступом Hailperin–а и Рашковића (в. [52] и [99]) у којем се примењује методологија линеарног прогамирања. Случај са немерљивим скуповима се третира по угледу на приступ који је обично присутан у теорији мере када се немерљивом скупу придружује његова унутрашња или спољна мера.

1.3 О расплинутим логикама

У моделирању процеса у којима доминирају несигурност и неодређеност (uncertainty and vagueness), поред теорије вероватноћа, веома чест је и приступ заснован на теорији расплинутих скупова (fuzzy set theory) која чини основицу расплинутих логика (fuzzy logics). За родоначелника оваквог приступа се сматра L. A. Zadeh својим славним чланком [120]. Ретке су идеје у историји математике које су отвориле толико много поља истраживања колико је то учинила идеја расплинутог скупа у другој половини прошлог века. Просто, скоро да нема области математике, пре свега примењене математике, на коју се није појам расплинућа (fuzzyness) рефлектовао. У овом нашем кратком уводу, који је искључиво у функцији дела текста који следи, ми ћемо се највише ослањати на следеће изворе: [6], [30], [31], [45], [78], [83] и [97].

У поређењу са класичном логиком исказа која почива на валуацији v која исказним словима, па и формулама, придружује вредности из двочланог скупа $\{0,1\}$, расплинуте логике могу бити окарактерисане валуацијом чије су вредности у реалном интервалу $[0,1]$ (в. [30], [31] и [97]), у некој Heyting–овој алгебри (в. [6], [30] и [31]) или мрежи (в. [30], [31], [45], [78] и [83]). Оваква карактеризација их доводи у блиску везу са поливалентним и вероватносним логикама, али и представља веродостојну паралелу описа преласка са класичне дефиниције скупа на дефиницију расплинутог скупа. У савременим приступима, ради јаснијег издвајања, у општој инфлацији радова из расплинутих логика, инсистира се на *математичким* расплинутим логикама (в. [30] и [31]). У њима се, као семантичка основица, најчешће узимају непрекидне троугаоне норме (continuous t–norms) посредством којих се дефинише природа логичких везника логике.

1.4 О поливалентним логикама

Појава поливалентних логика може се посматрати као задовољење потребе за адекватном класификацијом исказа према њиховој истинитосној вредности. Прву поливалентну, тачније тровалентну логику формулисао је Lukasiewicz [70] 1917. године (в. [11]), да би се убрзо отворио простор за увођење како коначновалентних, тако и бесконачновалентних исказних логика, мотивисаних разноврсним филозофским идејама и практичним проблемима.

У поређењу са класичном двовалентном логиком, у којој се сваки бинарни везник може окарактерисати таблицом истинитосних вредности дужине 2^2, m–валентну логику могуће је описати као систем у којем је сваки бинарни везник могуће дефинисати помоћу таблице дужине 2^m. Таблице истинитосних вредности представљају један стриктно семанички појам, па је основно питање, најчешће, како аксиоматизовати, тј. синтаксно описати одговарајућу поливалентну логику, што увек подразумева апсолутно поклапање синтаксе и семантике изражено кроз тврђења о сагласности и потпуности.

Полазимо од претпоставке да су везници коначновалентне логике $\mathcal{L}$ дефинисани одговарајућим таблицама истинитосних вредности над исказним језиком над пребројивим скупом исказних слова и основним везницима $\neg$, $\wedge$, $\vee$ и $\rightarrow$, са уобичајеним значењем, и скупом исказних формула For. У оваквом контексту природно се дефинише Lindenbaum–Tarski–јева алгебра логике $\mathcal{L}$ преко релације еквиваленције $\equiv_{\mathcal{L}}$ коју директно генерише оваква дефиниција (в. [7]):

$$A \equiv_{\mathcal{L}} B \quad \textit{акко} \quad \vdash_{\mathcal{L}} A \to B \quad \textit{и} \quad \vdash_{\mathcal{L}} B \to A$$

чијим се посредством издваја класа еквиваленције формуле A као $[A] = \{B | A \equiv B\}$, а у одговарајућем количничком скупу $\mathrm{For}/_{\equiv} = \{[A] | A \in \mathrm{For}\}$ се, над класама, дефинишу операције на следећи начин: $[A]' = [\neg A]$, $[A] \wedge [B] = [A \wedge B]$, $[A] \vee [B] = [A \vee B]$ и $[A] \to [B] = [A \to B]$. У оваквом приступу, јасно је да ће $\equiv$ представљати једну релацију конгруенције у односу на уведене операције на $\mathrm{For}/_{\equiv}$.

Биће од интереса чињеница да ће, за сваку коначновалентну логику, партиција скупа свих исказних формула изграђе них над скупом од n међусобно различитих исказних слова $\mathrm{For_n}$, заснована на претходно уведеној релацији конгруенције $\equiv$, садржати коначно много скупова. Штавише, број елемената скупа $\mathrm{For_n}/_{\equiv}$ неће превазилазити m^{m^n}.

Од конкретних система поливалентних логика у завршном делу рада помињаћемо тровалентне логике Lukasiewicz–а (в. [70], [71], [114] и [97]) и Kleene–ја (в. [62], [63] и [97]), са по једном десигнираном вредношћу, тровалентну логику Priest–а, са две десигниране вредности (в. [95] и [96]), као и четворовалентну логику Belnap–а (в. [8]) која има једну десигнирану вредност.

Поред њих, посматраћемо и интуиционистичку (или Heyting–ову) логику исказа $\mathbf{H}$ која базира на истоветним схема–аксиомама као и класична логика $\mathbf{C}$, уз изостављање аксиоме $(A3)$, тзв. Peirce–овог закона, и јединственом схема–правилу извођења *modus ponens*, те низове њених проширења. Први такав низ, у ознаци $\mathbf{H}+\mathbf{E}_m$, добија се када се исказној логици $\mathbf{H}$ додају схема–аксиоме $\mathbf{E}_m$:

$$\bigvee_{1 \leq i < j \leq m} (A_i \leftrightarrow A_j)$$

за $m \geq 3$, где $A \leftrightarrow B$ представља формулу $(A \to B) \wedge (B \to A)$. Овај низ је увео McKay (в. [76]) и сваки од ових система $\mathbf{H} + \mathbf{E}_m$ представља једну $(m-1)$–валентну логику са једном десигнираном вредношћу.

Heyting–ова $\mathbf{H}$ и Dummett–ова логика $\mathbf{LC} = \mathbf{H} + (A \to B) \vee (B \to A)$ (в.

[35] и [6]), која се, дакле, добија као проширење Heyting–ове логике додавањем схема–аксиоме $(A \to B) \vee (B \to A)$, представљају бесконачновалентне логике са по једном десигнираном вредношћу, док Gödel–ова проширења $\mathbf{S}_m$ (в. [50]) Dummett–ове логике дефинисане као $\mathbf{S}_m = \mathbf{LC} + A_m$, где је такозвани Nagata–ин низ формула (A_m) (в. [82]) индуктивно дефинисан са:

$$A_1 = ((P_2 \to P_1) \to P_2) \to P_2$$
$$A_{m+1} = ((P_{m+2} \to A_m) \to P_{m+2}) \to P_{m+2}$$

при чему су $P_1, P_2, \ldots$ исказна слова, представљају $(m+1)$–валентне логике које карактеришу $(m+1)$–елементни линеарно уређени системи са једном десигнираном вредношћу. Приметимо да формуле (A_m) представљају варијације Peirse–овог закона.

У општем приступу поливалентним логикама доминира алгебарско дефинисање логичког система посредством матрица истинитосних вредности које дефинишу понашање исказних везника. Матрица се обично дефинише (в. [10]) као уређен пар $\mathcal{A} = (\mathbf{A}, F)$, где је $\mathbf{A}$ алгебра над датим језиком исказа, а F било који подскуп од $\mathbf{A}$. Алгебарска релација дедукције, у ознаци $\models_{\mathcal{A}}$, дефинисана је над скупом $\mathcal{P}(\mathrm{For}) \times \mathrm{For}$ условом: $\Gamma \models_{\mathcal{A}} B$ ако и само ако из $h(\Gamma) \subseteq F$ следи $h(B) \in F$, за сваки хомоморфизам $h : \mathrm{For} \to \mathbf{A}$. Уколико је M класа матрица, релација дедукције $\models_M$ дефинише се као $\Gamma \models_M B$ ако и само ако је $\Gamma \models_{\mathcal{A}} B$, за сваку матрицу $\mathcal{A} \in M$. Класа матрица M представља матричну семантику дедуктивног система уколико се релација дедукције $\vdash$, коју смо дефинисали у вези са хилбертовском формулацијом класичне логике исказа, поклапа са алгебарском релацијом дедукције $\models_M$, што, у начелу, представља тврђење о сагласности и потпуности.

1.5 О ентропији

У радовима S. Carnot–а из 1824. године о основама функционисања парне машине и R. Clausius–а између 1851. и 1865. године, јављају се први наговештаји дефиниције ентропије. Ипак, појам ентропије се у литератури из области термодинамике везује за Ludwig–а Boltzmann–а и период од 1896. до 1898. године, када је ентропија S дефинисана као решење

$$S = k \log W$$

диференцијалне једначине

$$dS = \frac{dQ}{W}$$

где је k Boltzmann–ова константа и W број микростања компатибилних са задатим макростањем система који садржи n честица. Уз Boltzmann–а, M. Planck и J. W. Gibbs први истичу статистичко значење ентропије и уводе је у механику, као вероватносну функцију.

Концепт ентропије у теорији информација везује се за Klaude–а Shannon–а и представља меру неодређености једног стохастичког система. Нека је A случајан догађај са исходима $a_1, \ldots, a_n$, чија је расподела вероватноћа дата са $P(a_i) = p_i$, за $i \in \{1, \ldots n\}$, где су $p_i \geq 0$ за сваки $i \in \{1, \ldots n\}$ и $\sum_{i=0}^{n} p_i = 1$. Тада се ентропија случајног догађаја A дефинише као $H(A) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i$.

Shannon–ова ентропија, настала у контексту теорије информација, отвара могућност уопштења појма ентропије у оквирима теорије мере и омогућава излажење из стохастичког оквира. Једно од уопштења јесте ентропија партиције скупа снабдевеног мером. Под партицијом непразног скупа X подразумевамо највише пребројиву фамилију (A_i) међусобно дисјунктних подскупова скупа X за које важи $\cup_i \mathcal{A}_i = X$. Нека је $\alpha = \{A_i, i \in \mathbb{N}\}$ произвољна мерљива партиција, што подразумева $(\forall i)(i \in I \to \mu(\mathcal{A}_i) \geq 0)$, $(\forall i, j)(i \in I \wedge j \in I \wedge i \neq j \to \mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j = \emptyset)$ и $\mu(X \setminus \cup_{i \in I} \mathcal{A}_i) = 0$. Тада се ентропија партиције α дефинише као:

$$H(\alpha) = -\sum_{i \in I} \mu(\mathcal{A}_i) \log_2 \mu(\mathcal{A}_i)$$

при чему се по дефиницији узима $\mu(\mathcal{A}_i) \log_2 \mu(\mathcal{A}_i) = 0$, за $\mu(\mathcal{A}_i) = 0$, имајући у виду да је $\lim_{x \to 0+} x \log_2 x = 0$.

Искорак у односу на Shannon–ову ентропију направили су A. N. Kolmogorov и Ј. Г. Синаи 1959. године када су дефинисали још један концепт ентропије, коме овде нећемо посветити пажњу. Он се односи на детерминистичке динамичке системе. Полазећи од детерминистичког динамичког система чији је скуп стања $\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ у фазном простору током временских интервала

$\triangle t$, снабдевеног инваријантном мером, Kolmogorov–Sinai–ева ентропија система дефинише се као:

$$h_{KS} = \sup_{P} \lim_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{n\triangle t} \sum_{\omega_1\omega_2\ldots\omega_n} \mu_{\omega_1\omega_2\ldots\omega_n} \ln \mu_{\omega_1\omega_2\ldots\omega_n} \right)$$

где се супремум узима по свим могућим партицијама P, а са μ је означена дата инваријантна мера динамичког система.

2

Вероватносни рачуни секвената

У овом делу рада, кроз развијање три рачуна секвената **LKprob**, **LKprob**(ε) и **LKfuz**, и једног рачуна природних дедукција **NKprob**, доказујемо неколико темељних тврђења која оправдавају поменуте рачуне и укључују дефинисање одговарајућих модела, праћене резултатима сагласности и потпуности. За рачун **LKfuz** доказујемо и теорему о елиминацији сечења.

2.1 Вероватносни рачун секвената LKprob

Овај део текста је битно базиран на једном необјављеном чланку и саопштењима [16], [17], [22] и [23] аутора.

Присуство појма вероватноће истинитости исказа је евидентно још од самих почетака развоја модерне логике (в. [13], [111], [112]). Могло би се чак аргументовати да је G. Boole био први аутор који не само што је тврдио да је логика део математике, већ и да је теорија вероватноће природан део логике (в. [53]). Такође ваља напоменути да је славни економиста J. M. Keynes један од првих аутора који посматра експлицитно вероватноћу исказа (в. [61]), но, на жалост, његов рад није имао непосредног утицаја на развој ове области. Коначно, вероватносне функције у логику су увели R. Carnap [28] и K. Popper [93] (в. такође [51], [52], [53], [65], [66] и [67]) и засновали нову област логике — вероватносне логике. С друге стране, рачун секвената у логику је увео G. Gentzen [47] (в. такође [108], [106] и [94]) са циљем да укључи релацију дедукције $\vdash$ у објект–језик логичког система. Појам секвента, кроз елегантне Gentzen–ове формулације класичне **LK** и интуиционистичке **LJ** логике, са теоремом о елиминацији правила сечења (the cut–elimination theorem), заснива теорију доказа. Имајући у виду да сваки секвент $\Gamma \vdash \Delta$, где су Γ и Δ коначни низови (речи) (могуће празни) формула, може да се интерпретира као формула $\bigwedge \Gamma \rightarrow \bigvee \Delta$ која се састоји од конјункције формула које се појављују у Γ и дисјункције формула из Δ, рачун секвената је могуће посматрати и као уопштени рачун Horn–ових формула [54] које играју фундаменталну улогу у логичком програмирању.

Приступачан савремени увод у теорију вероватносних правила извођења налазимо код A. M. Frisch–a и P. Haddawy–ja [42], и C. G. Wagner–a [115], који повезују своја истаживања са филозофским наслеђем и покушајима претходних аутора као што су E. Adams (в. [2] и [3]), T. Hailperin (в. [51], [52] и [53]), D. Lewis (в. [68] и [69]), N. J. Nilsson (в. [84] и [85]) и P. Suppes (в. [105]). Поменимо, овом приликом, и инспиративан и екстензиван коауторски рад R. Fagin, J. Y. Halpern и N. Megiddo [37]. Коначно, истакнимо и то да су следећи извори непосредно утицали на ово истраживање: A. M. Frisch, P. Haddawy [42] и C. G. Wagner [115], који се превасходно односе на дедуктивне особине условне вероватноће, као и радови З. Огњановића и М. Рашковића [87] и [99], у којима се развија семантика за логике са вероватносним операторима над формулама, укључујући и преглед З. Огњановића, М. Рашковића и З. Марковића [89]. За разлику од њих, ми посматрамо једноставна вероватносна својства дедукције у контексту једне врсте рачуна означених секвената (labelled sequent calculus) попут оног категоријалног развијеног код M. E. Szabo–a [106] (в. такође [44], [113]). Модели које развијамо имају много заједничких елемената са моделима које су разматрали Carnap, Popper и Leblanc (в. [28], [93], [66] и [67]). Истакнимо и то да, мада Carnap и Popper припадају различитим школама мишљења (в. [79]), у овом домену њихови ставови се апсолутно поклапају. Наиме, H. Leblanc и B. C. van Fraassen (в. [65]) су анализирали дефиниције вероватноће исказа Carnap–a и Popper–a и доказали да се ради о логички подударним дефиницијама.

Радови које овде цитирамо углавном се баве вероватносним логикама задатим преко семантике или, синтаксно, преко система типа Hilbert–a (в. [99], [87], [89], [57], [32]). Радови [42] и [115] фрагментарно третирају вероватносне операторе у природним дедукцијама. Није нам познато да се до сада неко бавио истаживањем веза између вероватноће и секвената, изузев нашег рада [18] који се односи на секвенте са високим вероватноћама истинитости.

Када исказни језик проширимо неким вероватносним операторима, на пример, P_r ($r \in I$, где је I неки коначан подскуп реалног интервала $[0,1]$ који садржи 0 и 1), онда су, обично, итерације тих оператора дозвољене. У том случају постоји могућност да изразимо не само тврђење да је "вероватноћа истинитости исказа A већа од или једнака r" као "P_rA", већ, такође, и да изразимо став да је "вероватноћа истинитости исказа P_rA већа од или једнака s" као "P_sP_rA" (в. [87], [57] и [89]). Такав је приступ апсолутно у складу са духом логичке традиције третирања унарних оператора, као у модалним логикама (в. [29]). Ипак, с друге стране, наша основна информација, у складу са традицијом теорије вероватноће, односи се на само један ниво: ако је A случајан догађај, онда $P(A) \geq r$ значи да је "вероватноћа догађаја A већа или једнака r", док исказ $P\{P(A) \geq r\} \geq s$, мада представља смислено тврђење, не игра значајну улогу у теорији вероватноће и захтевао би проширење простора вероватноћа једном индуктивном дефиницијом која би осигурала да, ако је A случајан догађај, онда би то морао да буде и скуп $\{P(A) \geq r\}$, такође.

У нашем приступу, у оквиру јединственог система, комбинујемо два горе поменута концепта: вероватноћу исказа и релацију дедукције формализовану као у рачуну секвената. Појмом 'вероватносни секвент' уопштавамо традиционални појам секвента са циљем да формално опишемо рачун секвената облика $\Gamma \vdash_a^b \Delta$ са значењем "вероватноћа секвента $\Gamma \vdash \Delta$ припада скупу $[a,b] \cap I$", где је I коначан подскуп реалног интервала $[0,1]$ (затворен за сабирање такав да $0, 1 \in I$), или, имајући у виду теорему потпуности коју ћемо доказати, да "вероватноћа интинитости секвента $\Gamma \vdash \Delta$ износи $c \in [a,b] \cap I$". Ради једноставнијег означавања, убудуће ћемо користити $[a,b]$, уместо $[a,b] \cap I$. Имајући у виду присуство релације дедукције у секвентима, било би могуће интерпретирати секвент $\Gamma \vdash_a^b \Delta$ и као "вероватноца доказивости (или истинитости, имајући у виду теорему потпуности за исказни рачун класичне логике) секвента $\Gamma \vdash \Delta$ припада скупу $[a,b]$".

Овде ћемо дефинисати рачун секвената **LKprob** као модификацију оригиналног Gentzen–овог система **LK** за класичну логику исказа који омогућава рад са теоријама које се заснивају на чињеницама облика $\Gamma_i \vdash_{a_i}^{b_i} \Delta_i$, а које могу бити резултат неког емпиријског истраживања. Наиме, наш систем вероватносних секвената дефинише правила извођења помоћу којих можемо изводити закључке облика $\Gamma \vdash_a^b \Delta$, из коначне листе хипотеза $\Gamma_i \vdash_{a_i}^{b_i} \Delta_i$. Прецизније, систем **LKprob** може бити посматран као програм који даје као излаз **LKprob**$(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ за улаз $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, где је σ_i $(1 \leq i \leq n)$ низ са члановима облика $\Gamma_i \vdash_{a_i}^{b_i} \Delta_i$ $(1 \leq i \leq n)$. Циљ нам је да развијемо систем рада са вероватноћама над Gentzen–овим рачуном секвената класичне исказне логике **LK**. Нажалост, овај метод се не може униформно проширити на случај Gentzen–овог рачуна секвената интуиционистичке исказне логике **LJ**, мада постоје вредни резултати који се баве вероватносним верзијама интуиционистичке логике типа Hilbert–а (в. [72] и [73]), али, с друге стране, постоје индиције да би ипак било могуће добити потпуну вероватносну верзију **LJprob** рачуна секвената **LJ** на сличан начин. Наиме, прва дилема са којом бисмо се овде суочили јесте каквим условом заменити услов из класичне дефиниције вероватноће који даје унију два комплементарна догађаја као известан догађај, одакле би следило и да би вероватноћа закона искључења трећег износила 1, $p(A \vee \neg A) = 1$, што би интуиционистички било недопустиво.

Доминантан тип семантике за класичну вероватносну логику у литератури је Kripke–ова семантика могућих светова (в. [37], [84], [85], [87], [57], [89] и [99]), али овде, неочекивано, добијамо једноставнији тип семантике коју ћемо оправдати резултатима сагласности и потпуности.

2.1.1 Систем вероватносних секвената

Проширујући Gentzen–ов рачун класичне логике исказа **LK**, уводимо систем секвената **LKprob** над скупом исказних формула на следећи начин. За сваки секвент $\Gamma \vdash \Delta$ из **LK** претпостављамо да је, за све $a, b \in I$, $\Gamma \vdash_a^b \Delta$ секвент рачуна **LKprob**, где је суштинско значење секвента $\Gamma \vdash_a^b \Delta$ да "постоји $c \in [a, b]$ такав да вероватноћа секвента $\Gamma \vdash \Delta$ износи c". У случајевима када је $a = 1$ или $b = 0$, за $\Gamma \vdash_a^b \Delta$ и $a \leq b$ користимо следеће скраћенице $\Gamma \vdash_1 \Delta$ и $\Gamma \vdash^0 \Delta$, респективно, док у случају када је $a > b$ секвент схватамо $\Gamma \vdash^{\emptyset} \Delta$ као чисту контрадикцију.

Прецизније, исказне формуле су дефинисане над исказним језиком који се састоји од пребројивог скупа исказних слова: $\{p_1, p_2, ...\}$, логичких везника: $\neg$, $\wedge$, $\vee$ и $\rightarrow$, и два помоћна симбола:) и (, као у Дефиницији 1.1.1. Велика слова латинице $A, B, C, D, ...$ користимо као метапроменљиве над скупом исказних формула, док као метапроменљиве за речи над скупом исказних формула, тј. за коначне низове (могуће и празне) формула (без зареза), користимо велика слова грчког алфабета $\Gamma, \Delta, \Lambda, \Pi, ...$ Уместо празне речи остављамо празнину (бланко). За сваке две речи Γ и Δ, и све $a, b \in I$, $\Gamma \vdash_a^b \Delta$ је секвент.

Аксиоме рачуна **LKprob** су следећа два секвента:

$$\vdash^0$$

$$A \vdash_1 A$$

за сваку формулу A.

Структурна правила рачуна **LKprob** су:

$$\textit{пермутација:} \quad \frac{\Gamma A B \Pi \vdash_a^b \Delta}{\Gamma B A \Pi \vdash_a^b \Delta}(P \vdash_a^b) \qquad \frac{\Gamma \vdash_a^b \Delta A B \Lambda}{\Gamma \vdash_a^b \Delta B A \Lambda}(\vdash_a^b P)$$

$$\textit{контракција:} \quad \frac{\Gamma A A \vdash_a^b \Delta}{\Gamma A \vdash_a^b \Delta}(C \vdash_a^b) \qquad \frac{\Gamma \vdash_a^b A A \Delta}{\Gamma \vdash_a^b A \Delta}(\vdash_a^b C)$$

за све $a, b \in I$, *правило сечења:*

$$\frac{\Gamma \vdash_a^b A\Delta \quad \Pi A \vdash_c^d \Lambda}{\Gamma\Pi \vdash_{\max(0,a+c-1)}^{\min(b+d,1)} \Delta\Lambda}(\mathrm{cut}^{[a,b][c,d]})$$

за све $a, b, c, d \in I$, као и следећа *специфична структурна правила:*

$$\textit{слабљење:} \quad \frac{\Gamma \vdash_a^b \Delta \quad \vdash_c^d A}{\Gamma A \vdash_{\max(a,1-d)}^{\min(1,b+1-c)} \Delta}(W \vdash_a^b) \qquad \frac{\Gamma \vdash_a^b \Delta \quad \vdash_c^d A}{\Gamma \vdash_{\max(a,c)}^{\min(1,b+d)} A\Delta}(\vdash_a^b W)$$

за све $a, b, c, d \in I$,

$$\textit{монотоност:} \quad \frac{\Gamma \vdash_a^b \Delta}{\Gamma \vdash_c^d \Delta}(M \uparrow) \qquad \frac{\Gamma \vdash_a^b \Delta \quad \Gamma \vdash_c^d \Delta}{\Gamma \vdash_{\max(a,c)}^{\min(b,d)} \Delta}(M \downarrow)$$

за све $[a, b] \subseteq [c, d]$, и све $a \le b$ и $c \le d$, респективно, за $(M \uparrow)$ и $(M \downarrow)$, и следеће специфично правило које се односи на *адитивност:*

$$\frac{AB \vdash_1 \quad \vdash_a^b A \quad \vdash_c^d B}{\vdash_{\min(1,a+c)}^{\min(1,b+d)} AB}(ADD)$$

Ова правила, и нека од правила која следе, могу се оправдати добро познатим Boole–овим и Bonferroni–јевим неједнакостима према којим: из $\vdash_a^b A$ и $\vdash_c^d B$, можемо директно извести $\vdash_{\max(0,a+c-1)}^{\min(b,d)} A \wedge B$, $\vdash_{\max(a,c)}^{\min(1,b+d)} A \vee B$, $\vdash_{\max(1-b,c)}^{\min(1,1-a+d)} A \to B$ и $\vdash_{1-b}^{1-a} \neg A$. Напоменимо да су правила $(M\downarrow)$ и $(M\uparrow)$ такође позната, у нешто другачијој форми, редом, као "правило ширења интервала" ('the interval expansion inference rule') и "вишеструко правило извођења" ('the multiple derivation inference rule') (в. [42]).

Следеће правило, које се односи на *противречност:*

$$\frac{\Gamma \vdash^{\emptyset} \Delta}{\Pi \vdash^{\emptyset} \Lambda}(\perp)$$

непосредно је инспирисано радом Frisch–а и Haddawy–ја [42], које даје елегантнији систем извођења и јаснији статус непротивречности система.

Део нашег система је и следеће правило:

$$\frac{\dfrac{[\Gamma \vdash_{c_1}^{c_1} \Delta]}{\Gamma \vdash^{\emptyset} \Delta} \quad \dfrac{[\Gamma \vdash_{c_2}^{c_2} \Delta]}{\Gamma \vdash^{\emptyset} \Delta} \ \cdots \ \dfrac{[\Gamma \vdash_{c_m}^{c_m} \Delta]}{\Gamma \vdash^{\emptyset} \Delta}}{\Gamma \vdash^{\emptyset} \Delta}(\vdash \emptyset)$$

за све речи Γ и Δ, где је $I = \{c_1, c_2, \dots c_m\}$.

Дупле линије које се појављују у правилу $(\vdash \emptyset)$ представљају неколико корака у извођењу секвента $\Gamma \vdash^{\emptyset} \Delta$, док појављивање $[\Gamma \vdash_c^c \Delta]$ значи да је могуће изоставити $\Gamma \vdash_c^c \Delta$ из скупа хипотеза посматраног извођења. Прецизније, у овом случају скуп хипотеза се добија брисањем неких (или ниједног, или свих) појављивања секвента $\Gamma \vdash_c^c \Delta$, уколико таква постоје.

Непосредна последица правила $(\vdash \emptyset)$ биће да је секвент $\Gamma \vdash_0^1 \Delta$ доказив у нашем систему, за све речи Γ и Δ.

Напоменимо такође да правило сечења примењено на секвенте $\Gamma \vdash_a^b A\Delta$ и $\Pi A \vdash_c^d \Lambda$ чији интервали $[a, b]$ и $[c, d]$ нису у близини тачке 1 (или 0), дају закључак $\Gamma\Pi \vdash_{\max(0,a+c-1)}^{\min(b+d,1)} \Delta\Lambda$ са веома широким интервалом. На пример, из $\Gamma \vdash_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} A\Delta$ и $\Pi A \vdash_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \Lambda$ изводимо $\Gamma\Pi \vdash_0^1 \Delta\Lambda$, тј. тривијално доказив секвент.

Приметимо да правило адитивности (ADD) нема смисла у случају када је $a+c > 1$. Наиме, тада из $\vdash_a^1 A$ и $AB \vdash_1$, помоћу правила сечења изводимо $B \vdash_a^1$, тј. $\vdash_0^{1-a} B$. Али, уколико је $\vdash_c^1 B$, онда морамо узети да је $c < 1-a$, иначе бисмо добили $\vdash^{\emptyset} B$. Због тога верујемо да има више смисла разматрати један подсистем система **LKprob** који се бави искључиво интервалима облика $[1-\varepsilon, 1]$, за довољно мали $\varepsilon > 0$, што ћемо и учинити у наставку овог рада (в. [18]). Идеју за разматрање таквог система први пут налазимо код Suppes–а (в. [105] и [115]).

Логичка правила рачуна **LKprob** су:

$$\frac{\Gamma \vdash_a^b A\Delta}{\Gamma\neg A \vdash_a^b \Delta}(\neg\vdash_a^b) \qquad \frac{\Gamma A \vdash_a^b \Delta}{\Gamma \vdash_a^b \neg A\Delta}(\vdash_a^b \neg)$$

$$\frac{\Gamma AB \vdash_a^b \Delta}{\Gamma A\wedge B \vdash_a^b \Delta}(\wedge\vdash_a^b) \qquad \frac{\Gamma \vdash_a^b A\Delta \quad \Gamma \vdash_c^d B\Delta}{\Gamma \vdash_{\max(0,a+c-1)}^{\min(b,d)} A\wedge B\Delta}(\vdash_a^b \wedge)$$

$$\frac{\Gamma A \vdash_a^b \Delta \quad \Gamma B \vdash_c^d \Delta}{\Gamma A\vee B \vdash_{\max(0,a+c-1)}^{\min(b,d)} \Delta}(\vee\vdash_a^b) \qquad \frac{\Gamma \vdash_a^b AB\Delta}{\Gamma \vdash_a^b A\vee B\Delta}(\vdash_a^b \vee)$$

$$\frac{\Gamma \vdash_a^b A\Delta \quad \Gamma B \vdash_c^d \Delta}{\Gamma A\rightarrow B \vdash_{\max(0,a+c-1)}^{\min(b,d)} \Delta}(\rightarrow\vdash_a^b) \qquad \frac{\Gamma A \vdash_a^b B\Delta}{\Gamma \vdash_a^b A\rightarrow B\Delta}(\vdash_a^b\rightarrow)$$

Докази у **LKprob** (или у **LKprob**$(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$) имају форму дрвета, као у Gentzen–овом систему **LK**, чији се иницијални чворови састоје од самих инстанци аксиома, а свако гранање на дрвету се одвија у складу са појединим правилом система **LKprob**. За секвент $\Gamma \vdash_a^b \Delta$ кажемо да је *доказив у* **LKprob** уколико постоји дрво доказа у **LKprob** које се завршава секвентом $\Gamma \vdash_a^b \Delta$. Посебно се могу посматрати (в. [42]) "најбољи докази" за секвент $\Gamma \vdash_a^b \Delta$ у **LKprob** уколико је $[a, b]$ најужи интервал такав да је $\Gamma \vdash_a^b \Delta$ доказив у **LKprob** тј. $[a, b] = \bigcap\{[x, y] | \Gamma \vdash_x^y \Delta$ је доказив у **LKprob**$\}$. Очигледно, у случају када је најужи интервал за секвент $\Gamma \vdash \Delta$ празан скуп, тј. када је секвент $\Gamma \vdash^{\emptyset} \Delta$ **LKprob**–доказив, имамо нежељену ситуацију — противречност система.

Рачун **LKprob** можемо посматрати и као дефинисање (коначне) колекције релација $\vdash_a^b \subseteq \mathrm{W(For)} \times \mathrm{W(For)}$, $a, b \in I$, која представља уопштење релације $\vdash$ рачуна **LK**, и, очигледно, поседује следећа својства:

(i) $\vdash_0^1 = \mathrm{W(For)} \times \mathrm{W(For)}$;

(ii) $\vdash \subseteq \vdash_1$, где је релација $\vdash$ дефинисана рачуном **LK**;

(iii) $\vdash^{\emptyset} = \emptyset$;

(iv) ако $[a,b] \subseteq [c,d]$, онда $\vdash_a^b \subseteq \vdash_c^d$;

(v) $\vdash_a^b \cap \vdash_c^d \subseteq \vdash_{\max(a,c)}^{\min(b,d)}$,

где, јасно, својство *(i)* оправдава аксиома $\Gamma \vdash_0^1 \Delta$, својство *(ii)* говори о вези између рачуна **LK** и **LKprob**, својство *(iii)* се односи на непротивречност система **LKprob**, док својства *(iv)* и *(v)*, редом, следе из правила монотоности $(M\uparrow)$ и $(M\downarrow)$.

Сада наводимо и неколико помоћних тврђења која се односе на **LKprob**–доказивост:

Лема 2.1.1. *(a) (Вероватноћа комплементарног догађаја) Ако је секвент* $\vdash_a^b A$ *доказив у* **LKprob**, *онда* $\vdash_{1-b}^{1-a} \neg A$ *доказив у* **LKprob**; *ако је секвент* $A \vdash_a^b$ *доказив у* **LKprob**, *онда је* $\neg A \vdash_{1-b}^{1-a}$ *доказив у* **LKprob**.

(b) (Адитивност) Ако су секвенти $\vdash^0 A \wedge B$, $\vdash_a^b A$ *и* $\vdash_c^d B$ *доказиви у* **LKprob**, *онда је* $\vdash_{\min(1,a+c)}^{\min(1,b+d)} A \vee B$ *доказив у* **LKprob**.

(c) Ако је секвент $\Gamma \vdash \Delta$ *доказив у* **LK**, *онда је* $\Gamma \vdash_1 \Delta$ *доказив у* **LKprob**.

(d) Ако су секвенти $\vdash_c^c A$ *и* $A \vdash_1 B$ *доказиви у* **LKprob**, *онда је* $\vdash_c^1 B$ *доказив у* **LKprob**.

Доказ. *(a)* Следи непосредно из правила $(\neg \vdash_a^b)$, $(\vdash_a^b \neg)$ и правила слабљења $(W \vdash_a^b)$.

(b) Следи из правила адитивности (ADD).

(c) Индукцијом по дужини доказа секвента $\Gamma \vdash_1 \Delta$ у **LKprob**.

(d) Непосредно помоћу правила сечења. □

Непосредно, помоћу претходне леме, можемо доказати:

Последица 2.1.2. *Ако* $\vdash_c^c A$, $\vdash_d^d B$, $A \vdash_1 B$ *и* $B \vdash_1 A$, *онда* $c = d$.

Ова чињеница би оправдавала принцип да *еквидоказиви секвенти имају једнаке вероватноће.*

Такође, можемо добити и следеће тврђење:

Последица 2.1.3. *(a) (Субадитивност) Ако су секвенти* $\vdash^0 A \wedge B$, $\vdash_a^1 A$ *и* $\vdash_c^1 B$ *доказиви у* **LKprob**, *онда је* $\vdash_{\min(1,a+c)}^1 A \vee B$ *доказив у* **LKprob**.

(b) (Суперадитивност) Ако су секвенти $\vdash_0^b A$ *и* $\vdash_0^d B$ *доказиви у* **LKprob**, *онда је* $\vdash_0^{\min(1,b+d)} A \vee B$ *доказив у* **LKprob**.

Сада наводимо два примера дрвета извођења.

Пример 2.1.4. *Нека су дате хипотезе* $B \vdash_{0.5}^{0.8} D$, $A \vdash_{0.7}^{0.9} FG$, $BG \vdash_{0.6}^{0.9} E$ *и* $AC \vdash_{0.5}^{0.6} (D\wedge E)F$. *У систему* **LKprob** *можемо доказати* $A(B\vee C) \vdash_{0}^{0.6} (D\wedge E)F$ *на следећи начин:*

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{B \vdash_{0.5}^{0.8} D}{AB \vdash_{0.5}^{0.8} DF}(W\vdash,\vdash W) \quad \dfrac{A \vdash_{0.7}^{0.9} FG \quad BG \vdash_{0.6}^{0.9} E}{AB \vdash_{0.3}^{1} FE}(cut)}{AB \vdash_{0}^{0.8} (D\wedge E)F}(\vdash\wedge) \qquad AC \vdash_{0.5}^{0.6} (D\wedge E)F}{A(B\vee C)\vdash_{0.5}^{0.6}(D\wedge E)F}(\vee\vdash)$$

У наставку рад биће дат и пример са конкретним интерпретацијама хипотеза из управо наведеног примера.

Пример 2.1.5. *У овом примеру илустроваћемо примену правила адитивности. Нека су дате хипотезе* $AB \vdash_1$, $\neg A \vdash_{0.37}^{0.42}$, $\vdash_{0.22}^{0.35} B$, $AB \vdash_{0.72}^{0.83} C$ *и* $ABD \vdash_{0.91}^{0.92} E$. *Одговарајуће дрво извођења у* **LKprob** *представљамо у наставку:*

$$\dfrac{\dfrac{AB\vdash_1 \quad \dfrac{\neg A\vdash_{0.37}^{0.42}}{\vdash_{0.37}^{0.42} A} \quad \vdash_{0.22}^{0.35} B}{\vdash_{0.59}^{0.77} AB}(ADD) \qquad \dfrac{AB\vdash_{0.72}^{0.83} C \quad ABD\vdash_{0.91}^{0.92} E}{ABC\to D\vdash_{0.63}^{0.83} E}(\to\vdash)}{C\to D\vdash_{0.13}^{1}}(cut)$$

2.1.2 Модели за вероватносне секвенте

Сада ћемо описати моделе за **LKprob** (в. [17]).

Дефиниција 2.1.6. *Нека је Seq скуп свих неозначених секвената, тј. секвената облика* $\Gamma \vdash \Delta$, *и* I *коначан подскуп реалног интервала* $[0,1]$ *затворен за сабирање и који садржи елементе* 0 *и* 1. *Тада ће пресликавање* $p : Seq \to I$ *представљати модел, уколико задовољава следеће услове:*

(i) $p(A \vdash A) = 1$, *за сваку формулу* A;

(ii) ако $p(AB \vdash) = 1$, *онда* $p(\vdash AB) = p(\vdash A) + p(\vdash B)$, *за све формуле* A *и* B;

(iii) ако су секвенти $\Gamma \vdash \Delta$ *и* $\Pi \vdash \Lambda$ *еквивалентни у* **LK**, *у смислу да су*

доказива оба следећа секвента $\bigwedge\Gamma \to \bigvee\Delta \vdash \bigwedge\Pi \to \bigvee\Lambda$ *и* $\bigwedge\Pi \to \bigvee\Lambda \vdash \bigwedge\Gamma \to \bigvee\Delta$ *у* **LK**, *тада* $p(\Gamma \vdash \Delta) = p(\Pi \vdash \Lambda)$.

Подвлачимо да горње аксиоме грубо кореспондирају са Carnap–овим и Popper–овим аксиомама вероватноће исказа (в. [28] и [93]), чије су варијације и међусобне односе разматрали Leblanc и van Fraassen (в. [65], [66] и [67]).

Приметимо такође да у случају да горњи услов *(ii)* заменимо следећим условом *(iv)* ако је $AB \vdash$ доказив у **LK**, онда $p(\vdash AB) = p(\vdash A) + p(\vdash B)$, за све формуле A и B, услов *(iii)* би био сувишан у овој дефиницији, као последица услова *(i)* и *(iv)*. Ипак, ради вишег степена интуитивности и јасније кореспонденције са Carnap–овим и Popper–овим аксиомама, полазимо од дефиниције каква је управо дата.

Дефиниција 2.1.7. *Кажемо да је вероватносни секвент* $\Gamma \vdash_a^b \Delta$ *задовољен у моделу* p *ако*

$$\models_p \Gamma \vdash_a^b \Delta \quad \text{акко} \quad a \leq p(\Gamma \vdash \Delta) \leq b$$

За секвент $\Gamma \vdash_a^b \Delta$ *ћемо рећи да је ваљан ако је исти задовољен у сваком моделу, што означавамо са* $\models \Gamma \vdash_a^b \Delta$.

У продужетку ћемо размотрити нека од основних својстава функције p.

Лема 2.1.8. *За све формуле* A *и* B *важи:*

(a) $p(\vdash \neg A) = 1 - p(\vdash A)$;

(b) $p(\vdash AB) = p(\vdash A) + p(\vdash B) - p(\vdash A \wedge B)$;

(c) $p(\vdash AB) \geq p(\vdash A)$;

(d) $p(A \vdash B) \leq p(A \vdash) + p(\vdash B)$;

(e) $p(A \vdash A) = p(A \vdash) + p(\vdash A)$.

Доказ. *(a)* Користећи особине *(i)*, *(ii)* и *(iii)* функције p , имамо $1 = p(A \vdash A) = p(\vdash A\neg A) = p(\vdash A) + p(\vdash \neg A)$.

(b) Како су $\vdash (A \wedge B)(\neg A \wedge B)$ и $\vdash B$ еквивалентни, и $p(AB\neg AB \vdash) = 1$, из *(ii)* и *(iii)*, имамо $p(\vdash B) = p(\vdash (A \wedge B)(\neg A \wedge B)) = p(\vdash (A \wedge B)) + p(\vdash (\neg A \wedge B))$. Такође, $\vdash AB$ и $\vdash A(\neg A \wedge B)$ су еквивалентни. Користећи *(ii)*, *(iii)* и претходну чињеницу, имамо $p(\vdash AB) = p(\vdash A(\neg A \wedge B)) = p(\vdash A) + p(\vdash (\neg A \wedge B)) = p(\vdash A) + p(\vdash B) - p(\vdash A \wedge B)$.

(c) Слично, $p(\vdash AB) = p(\vdash A(\neg A \wedge B)) = p(\vdash A) + p(\vdash \neg A \wedge B) \geq p(\vdash A)$.

(d) Следи директно из *(b)*, јер $p(\vdash \neg A \wedge B) \geq 0$.

(e) Следи из *(ii)* и *(iii)*. □

Леме које следе гарантују нам сагласност рачуна **LKprob** са датим моделом.

Лема 2.1.9. *За све формуле A и B и сваки секвент $\Gamma \vdash \Delta$ важи:*

(a) $\models \Gamma \vdash_0^1 \Delta$;

(b) $\models \vdash^0$;

(c) $\models A \vdash_1 A$.

Доказ. *(a)* $\models_p \Gamma \vdash_0^1 \Delta$ важи за све p, јер $p(\Gamma \vdash \Delta) \in [0,1]$, за сваки p.

(b) $1 = p(A \vdash A) = p(\vdash A \neg A) = p(\vdash A \neg A) + p(\vdash)$, па $\models_p \vdash^0$ важи за сваки p.

(c) $p(A \vdash A) = 1$, тако да $\models_p A \vdash_1 A$ важи за сваки p. □

Из услова *(iii)* наше дефиниције непосредно имамо:

Лема 2.1.10. *За све формуле A и B, и све речи Γ, Δ, Π и Λ:*

(a) $p(\Gamma AB\Pi \vdash \Delta) = p(\Gamma BA\Pi \vdash \Delta)$;

(b) $p(\Gamma \vdash \Delta AB\Lambda) = p(\Gamma \vdash \Delta BA\Lambda)$;

(c) $p(\Gamma A\Pi \vdash \Delta) = p(\Gamma AA\Pi \vdash \Delta)$;

(d) $p(\Gamma \vdash \Delta A\Lambda) = p(\Gamma \vdash \Delta AA\Lambda)$;

(e) $p(\Gamma \vdash A\Delta) = p(\Gamma \neg A \vdash \Delta)$;

(f) $p(\Gamma A \vdash \Delta) = p(\Gamma \vdash \neg A\Delta)$;

(g) $p(\Gamma AB \vdash \Delta) = p(\Gamma A \wedge B \vdash \Delta)$;

(h) $p(\Gamma \vdash AB\Delta) = p(\Gamma \vdash A \vee B\Delta)$;

(k) $p(\Gamma A \vdash B\Delta) = p(\Gamma \vdash A \rightarrow B\Delta)$.

Лема 2.1.11. *За све формуле A и B, и све речи Γ, Δ, Π и Λ, важи:*

(a) ако $a \leq p(\Gamma \vdash \Delta) \leq b$ и $c \leq p(\vdash A) \leq d$, онда

$$\max(a, 1-d) \leq p(\Gamma A \vdash \Delta) \leq \min(1, b+1-c);$$

(b) ако $a \leq p(\Gamma \vdash \Delta) \leq b$ и $c \leq p(\vdash A) \leq d$, онда

$$\max(a, c) \leq p(\Gamma \vdash A\Delta) \leq \min(1, b+d);$$

(c) ако $a \leq p(\Gamma \vdash A\Delta) \leq b$ *и* $c \leq p(\Gamma \vdash B\Delta) \leq d$*, онда*

$$\max(0, a+c-1) \leq p(\Gamma \vdash A \wedge B\Delta) \leq \min(b, d);$$

(d) ако $a \leq p(\Gamma A \vdash \Delta) \leq b$ *и* $c \leq p(\Gamma B \vdash \Delta) \leq d$*, онда*

$$\max(0, a+c-1) \leq p(\Gamma A \vee B \vdash \Delta) \leq \min(b, d);$$

(e) ако $a \leq p(\Gamma \vdash A\Delta) \leq b$ *и* $c \leq p(\Gamma B \vdash \Delta) \leq d$*, онда*

$$\max(0, a+c-1) \leq p(\Gamma A \rightarrow B \vdash \Delta) \leq \min(b, d).$$

Доказ. (a) Из $p(\Gamma \vdash \Delta) \in [a, b]$ и $p(\vdash A) \in [c, d]$ следи

$$\begin{aligned} p(\Gamma A \vdash \Delta) &= p(\vdash \neg(\bigwedge \Gamma)\neg A\Delta) \\ &= p(\vdash \neg(\bigwedge \Gamma)\Delta) + p(\vdash \neg A) - p(\vdash (\neg(\bigwedge \Gamma)\Delta) \wedge \neg A) \\ &= p(\Gamma \vdash \Delta) + 1 - p(\vdash A) - p(\vdash (\neg(\bigwedge \Gamma)\Delta) \wedge \neg A) \end{aligned}$$

тј. $p(\Gamma A \vdash \Delta) \in [\max(a, 1-d), \min(1, b+1-c)]$.

(b) Слично као *(a)*.

(c) Из $p(\Gamma \vdash A\Delta) \in [a, b]$ и $p(\Gamma \vdash B\Delta) \in [c, d]$ следи

$$\begin{aligned} p(\Gamma \vdash (A \wedge B)\Delta) &= p(\vdash (A \wedge B)\Delta\neg(\bigwedge \Gamma)) \\ &= p(\vdash (A \vee \Delta \vee \neg(\bigwedge \Gamma)) \wedge (B \vee \Delta \vee \neg(\bigwedge \Gamma))) \\ &= p(\vdash A\Delta\neg(\bigwedge \Gamma)) + p(\vdash B\Delta\neg(\bigwedge \Gamma)) - p(\vdash AB\Delta\neg(\bigwedge \Gamma)) \\ &= p(\Gamma \vdash A\Delta) + p(\Gamma \vdash B\Delta) - p(\vdash AB\Delta\neg(\bigwedge \Gamma)) \end{aligned}$$

Дакле, $p(\Gamma \vdash (A \wedge B)\Delta) \in [\max(0, a+c-1), \min(b, d)]$.

(d) Из $p(\Gamma A \vdash \Delta) \in [a,b]$ и $p(\Gamma B \vdash \Delta) \in [c,d]$ имамо

$$\begin{aligned}
p(\Gamma(A \vee B) \vdash \Delta) &= p(\vdash (\neg A \wedge \neg B)\Delta \neg(\bigwedge \Gamma)) \\
&= p(\vdash (\neg A \vee \Delta \vee \neg(\bigwedge \Gamma)) \wedge (\neg B \vee \Delta \vee \neg(\bigwedge \Gamma))) \\
&= p(\vdash \neg A \Delta \neg(\bigwedge \Gamma)) + p(\vdash \neg B \Delta \neg(\bigwedge \Gamma)) - \\
&\quad - p(\vdash \neg A \neg B \Delta \neg(\bigwedge \Gamma)) \\
&= p(\Gamma A \vdash \Delta) + p(\Gamma B \vdash \Delta) - p(\vdash \neg A \neg B \Delta \neg(\bigwedge \Gamma))
\end{aligned}$$

Дакле, $p(\Gamma(A \vee B) \vdash \Delta) \in [\max(0, a+c-1), \min(b,d)]$.

(e) Слично, ако претпоставимо $p(\Gamma \vdash A\Delta) \in [a,b]$ и $p(\Gamma B \vdash \Delta) \in [c,d]$, имамо

$$\begin{aligned}
p(\Gamma(A \rightarrow B) \vdash \Delta) &= p(\vdash (A \wedge \neg B)\Delta \neg(\bigwedge \Gamma)) \\
&= p(\vdash (A \vee \Delta \vee \neg(\bigwedge \Gamma)) \wedge (\neg B \vee \Delta \vee \neg(\bigwedge \Gamma))) \\
&= p(\vdash A \Delta \neg(\bigwedge \Gamma)) + p(\vdash \neg B \Delta \neg(\bigwedge \Gamma)) - p(\vdash A \neg B \Delta \neg(\bigwedge \Gamma)) \\
&= p(\Gamma \vdash A\Delta) + p(\Gamma B \vdash \Delta) - p(\vdash A \neg B \Delta \neg(\bigwedge \Gamma))
\end{aligned}$$

Дакле, $p(\Gamma(A \rightarrow B) \vdash \Delta) \in [\max(0, a+c-1), \min(b,d)]$. □

Следећа лема се бави правилом сечења и њему блиским правилима.

Лема 2.1.12. *Нека је* $p(\vdash A) = a$, $p(\vdash B) = b$, $p(\vdash C) = c$, $p(A \vdash B) = r$ *и* $p(B \vdash C) = s$, *уз услов* $a + r \geq 1$. *Тада:*

(a) (T. Hailperin [52]) (Вероватносна верзија правила modus ponens)

$$a + r - 1 \leq p(\vdash B) \leq r$$

(b) (C. G. Wagner [115]) (Вероватносна верзија правила modus tollens)

$$r - b \leq p(A \vdash) \leq r$$

(c) (M. Боричић [16] и [24]) (Вероватносна верзија правила хипотетичког силогизма)

$$\max(1-a, b) + \max(1-a, 1-b, c) - 1 \leq p(A \vdash C) \leq 2 - a - b + c$$

(d) (М. Боричић [16] и [24]) (Вероватносна верзија правила хипотетичког силогизма)

$$\max(r-a, r+s-1) \leq p(A \vdash C) \leq \min(s+1-a, r+c)$$

Границе у (a), (b), (c) и (d) су најбоље могуће.

Доказ. *(a)* Из $p(\vdash B) \leq p(A \vdash B)$ и $p(A \vdash B) \leq p(A \vdash) + p(\vdash B)$ изводимо $p(A \vdash B) - p(A \vdash) \leq p(\vdash B) \leq p(A \vdash B)$, тј. $a + r - 1 \leq p(\vdash B) \leq r$.

(b) Из $p(A \vdash B) = p(\neg B \vdash \neg A)$ непосредно изводимо $r - b \leq p(A \vdash) \leq r$.

(c) Посматрајмо следеће извођење:

$$\dfrac{\vdash A \to B \qquad \dfrac{A \vdash A \quad B \vdash C}{A(A \to B) \vdash C}(*)}{A \vdash C}(**)$$

у којем је корак означен са $(*)$ направљен по правилу 'увођења импликације у антецеденс' $(\to\vdash)$ облика:

$$\dfrac{A \vdash B \quad C \vdash D}{A(B \to C) \vdash D}(\to\vdash)$$

док је корак означен са $(**)$ заправо специјалан случај примене правила сечења, тј. правила *modus ponens*:

$$\dfrac{\vdash B \quad AB \vdash C}{A \vdash C}$$

Ово извођење показује како правило хипотетичког силогизма може да се изведе као логичка последица правила *modus ponens*. Из претпоставки $p(\vdash A) = a$, $p(\vdash B) = b$, $p(\vdash C) = c$, $p(A \vdash B) = r$ и $p(B \vdash C) = s$, означимо ли још $p(A \vdash ((A \to B) \to C)) = t$, имамо:

$$\max(1-a, b) \leq r \leq \min(1, 1-a+b), \tag{2.1.1}$$

$$\max(1-b, c) \leq s \leq \min(1, 1-b+c) \tag{2.1.2}$$

и

$$\max(1-a, c) \leq p(A \vdash C) \leq \min(1, 1-a+c) \tag{2.1.3}$$

Из
$$t = p(A(A \to B) \vdash C) = p(\vdash \neg A \vee \neg B \vee C) =$$
$$= p(B \vdash C) + p(\vdash \neg A) - p(\vdash \neg A \wedge (B \to C))$$
закључујемо:
$$\max(1-a, s) \leq t \leq \min(1, s+1-a) \tag{2.1.4}$$

С друге стране, имајући у виду Hailperin–ов резултат *(a)* који се односи на вероватносни аналогон правила *modus ponens*, тј. његов специјалан случај означен са $(**)$, имамо
$$r + t - 1 \leq p(A \vdash C) \leq t \tag{2.1.5}$$

Даље, из (2.1.2) и (2.1.4) добијамо:
$$\max(1-a, 1-b, c) \leq t \leq \min(1, 1-b+c) + 1 - a \tag{2.1.6}$$

да бисмо, коначно, из (2.1.1), (2.1.3), (2.1.5) и (2.1.6), добили:
$$\max(1-a, b) + \max(1-a, 1-b, c) - 1 \leq p(A \vdash C) \leq \min(1, 1-a+c)$$

(d) Из претходне релације *(c)*, непосредно изводимо:
$$\max(r-a, r+s-1) \leq p(A \vdash C) \leq \min(s+1-a, r+c, 1)$$

имајући у виду $1-a \leq r$ и $1-a+c \leq r+c$. $\square$

Напоменимо да део *(c)* наше леме уопштава и садржи као своје посебне случајеве оба резултата Hailperin–ову вероватносну верзију правила *modus ponens* и Wagner–ову вероватносну верзију правила *modus tollens*. Такође, као непосредну последицу ове леме, како је $\max(r-a, r+s-1) \geq r+s-1$ и $\min(s+1-a, r+c, 1) \leq r+c \leq r+s$, добијамо тражену вероватносну форму правила сечења:

Последица 2.1.13. *Ако $a \leq p(\Gamma \vdash A\Delta) \leq b$ и $c \leq p(\Pi A \vdash \Lambda) \leq d$, онда*
$$\max(0, a+c-1) \leq p(\Gamma\Pi \vdash \Delta\Lambda) \leq \min(b+d, 1).$$

2.1.3 Непротивречне LKprob–теорије

<u>Дефиниција</u> **2.1.14.** *Нека је* σ_i $(1 \le i \le n)$ *коначан низ секвената облика* $\Gamma_i \vdash_{a_i}^{b_i} \Delta_i$*, за* $a_i, b_i \in I$ $(1 \le i \le n)$*. Тада, са* $\mathbf{LKprob}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ *означавамо проширење рачуна* **LKprob** *секвентима* $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ *као додатним аксиомама и називамо га* **LKprob***–теоријом над* $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$*.*

<u>Дефиниција</u> **2.1.15.** *Кажемо да је теорија* $\mathbf{LKprob}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ *противречна ако постоје два секвента* $\Gamma \vdash_a^b \Delta$ *и* $\Gamma \vdash_c^d \Delta$*, оба доказива у* $\mathbf{LKprob}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ *таква да је* $[a, b] \cap [c, d] = \emptyset$*; у супротном, кажемо да је* $\mathbf{LKprob}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ *непротивречна.*

<u>Дефиниција</u> **2.1.16.** *За секвент* $\Gamma \vdash_a^b \Delta$ *кажемо да је непротивречан у односу на теорију* $\mathbf{LKprob}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ *уколико је* $\mathbf{LKprob}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n, \Gamma \vdash_a^b \Delta)$ *непротивречна теорија. Непротивречну теорију називамо максималном непротивречном теоријом уколико је свако њено право проширење противречно.*

Приметимо да у случају противречне теорије, из $\Gamma \vdash_a^b \Delta$ и $\Gamma \vdash_c^d \Delta$, помоћу правила $(M \downarrow)$ можемо извести $\Gamma \vdash^{\emptyset} \Delta$, одакле, даље, помоћу $(M \uparrow)$, изводимо $\Gamma \vdash_a^b \Delta$, за све $a, b \in I$, и, штавише, изводимо $\Pi \vdash_a^b \Lambda$, за све $a, b \in I$ и све Π, Λ, користећи $(\perp)$.

<u>Лема</u> **2.1.17.** *Свака непротивречна теорија може се проширити до максималне непротивречне теорије.*

Доказ. Нека је $\mathcal{T}$ непротивречна теорија, и нека је $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ низ неозначених секвената, тј. α_n је облика $\Gamma_n \vdash \Delta_n$, и за сваки $c \in I$, нека је $\alpha_1^c, \alpha_2^c, \ldots, \alpha_n^c, \ldots$ низ одговарајућих означених секвената, тј. α_n^c је облика $\Gamma_n \vdash_c^c \Delta_n$. Нека је, даље, $(\mathcal{T}_n)$ низ теорија дефинисан индуктивно на следећи начин: $\mathcal{T}_0 = \mathcal{T}$, и $\mathcal{T}_{n+1} = \mathcal{T}_n \cup \{\alpha_n^{c_1}\}$, уколико је $\alpha_n^{c_1}$ непротивречна у односу на $\mathcal{T}_n$, али, уколико није непротивречна, онда: $\mathcal{T}_{n+1} = \mathcal{T}_n \cup \{\alpha_n^{c_2}\}$, уколико је $\alpha_n^{c_2}$ непротивречна у односу на $\mathcal{T}_n$, али, уколико није, онда ... $\mathcal{T}_{n+1} = \mathcal{T}_n \cup \{\alpha_n^{c_{m-1}}\}$, уколико је $\alpha_n^{c_{m-1}}$ непротивречна у односу на $\mathcal{T}_n$, и, коначно, $\mathcal{T}_{n+1} = \mathcal{T}_n \cup \{\alpha_n^{c_m}\}$, иначе; где је $\{c_1, c_2, \ldots, c_m\} = I$. Нагласимо да крајњи разултат ове конструкције зависи од редоследа тачака $c_1, c_2, \ldots, c_m$ скупа I. Нека је

$$\mathcal{T}' = \cup_{n \in \omega} \mathcal{T}_n$$

Тада, индукцијом по n доказаћемо да је $\mathcal{T}'$ једно максимално непротивречно проширење полазне теорије $\mathcal{T}$. Најпре ћемо доказати да ако је $\mathcal{T}_n$ непротивречна, онда је и $\mathcal{T}_{n+1}$ непротивречна. Једини интересантан случај је када је $\mathcal{T}_{n+1} = \mathcal{T}_n \cup \{\alpha_n^{c_m}\}$. Тада, тоерија $\mathcal{T}_{n+1}$ мора бити непротивречна због правила $\vdash \emptyset$. Да бисмо доказали да је $\mathcal{T}'$ максимално непротивречно проширење теорије $\mathcal{T}$ проширићемо теорију $\mathcal{T}'$ секвентом $\Gamma_k \vdash_a^b \Delta_k$. У случају да је то право проширење, ми већ знамо да теорија $\mathcal{T}_{k+1} \subset \mathcal{T}'$ садржи $\Gamma_k \vdash_c^c \Delta_k$, за неки $c \notin [a,b]$, па је, следствено томе, ово проширење противречно. □

Показаћемо да је у овом случају проблем непротивречности једне **LKprob**–теорије могуће свести на питање непротивречности њеног скупа извесно доказивих секвената, тј. секвената облика $\Gamma \vdash_1 \Delta$:

<u>**Лема**</u> **2.1.18.** **LKprob**$(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ *је непротивречна акко постоји секвент* $\Gamma \vdash_1 \Delta$ *који није доказив у* **LKprob**$(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$.

Доказ. Ако је теорија **LKprob**$(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ противречна, онда је секвент $\Gamma \vdash_a^b \Delta$ доказив за све Γ и Δ, и све $a, b \in I$, па су, стога, и сви секвенти облика $\Gamma \vdash_1 \Delta$ доказиви. Обрнуто, ако су сви секвенти облика $\Gamma \vdash_1 \Delta$ доказиви, онда је $\vdash_1$ такође доказив, што значи да је теорија **LKprob**$(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ противречна, имајући у виду да је $\vdash^0$ једна аксиома. □

Одавде следи да се питање непротивречности може третирати и на традиционалан начин:

<u>**Последица**</u> **2.1.19.** **LKprob**$(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ *је противречна акко постоји формула* A *таква да су оба секвента* $\vdash_1 A$ *и* $\vdash_1 \neg A$ *доказива у* **LKprob**$(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$.

2.1.4 Сагласност и потпуност рачуна LKprob

У овом делу рада дефинишемо појам канонског модела и доказујемо теореме сагласности и потпуности за **LKprob**–теорије.

<u>**Теорема**</u> **2.1.20.** *(Теорема сагласности) Ако нека* **LKprob**–*теорија има модел, онда је она непротивречна.*

Доказ. Индукцијом по дужини доказа за сваки секвент $\Gamma \vdash_a^b \Delta$ који је доказив у **LKprob** можемо доказати да је систем **LKprob** сагласан. Ова чињеница следи директно из нашег оправдавања аксиома и правила извођења у тврђењима 2.1.9 — 2.1.13. Дакле, сваки скуп секвената $\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ који је задовољен, биће и непротивречан у односу на **LKprob**. □

Да бисмо доказали потпуност, најпре дефинишемо појам *канонског модела.*

Дефиниција 2.1.21. *Нека је* $Cn(\mathbf{LKprob}(\sigma_1, \dots, \sigma_n))$ *скуп свих секвената који су доказиви у* $\mathbf{LKprob}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ *и нека је* $ConExt(Cn(\mathbf{LKprob}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)))$ *класа свих његових максималних непротивречних проширења. Тада, за сваки* $X \in ConExt(Cn(\mathbf{LKprob}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)))$ *кажемо да је секвент* $\Gamma \vdash_a^b \Delta$ *задовољен у моделу* p^X*, у ознаци* $\models_{p^X} \Gamma \vdash_a^b \Delta$*, уколико* $a \leq \max\{c | \Gamma \vdash_c^1 \Delta \in X\}$ *и* $b \geq \min\{c | \Gamma \vdash_0^c \Delta \in X\}$.

Очигледно, оваква дефиниција осигурава да пресликавање p^X, које зависи од X, добије адекватне вредности. У овом случају имамо:

Лема 2.1.22. $\models_{p^X} \Gamma \vdash_a^b \Delta$ *акко* $\Gamma \vdash_a^b \Delta \in X$.

Доказ. Из $\models_{p^X} \Gamma \vdash_a^b \Delta$, по претходној дефиницији и правилу монотоности $(M \uparrow)$, имамо $\Gamma \vdash_a^1 \Delta \in X$. Слично, $\Gamma \vdash_0^b \Delta \in X$, одакле, по правилу монотоности $(M \downarrow)$, закључујемо $\Gamma \vdash_a^b \Delta \in X$. Обрнуто, ако $\Gamma \vdash_a^b \Delta \in X$, онда, како је X дедуктивно затворен, по правилу монотоности $(M \uparrow)$, добијамо $\Gamma \vdash_a^1 \Delta \in X$, па је $a \leq \max\{c | \Gamma \vdash_c^1 \Delta \in X\}$. Слично, $\Gamma \vdash_0^b \Delta \in X$, па је $b \geq \min\{c | \Gamma \vdash_0^c \Delta \in X\}$. Следствено томе, имамо $\models_{p^X} \Gamma \vdash_a^b \Delta$. □

Ради сажетости, надаље изостављамо ознаку X из p^X, и пишемо само p.

Такође имамо:

Лема 2.1.23. *Канонски модел је модел.*

Доказ. Нека је p било које пресликавање дефинисано као горе на произвољном максималном непротивречном скупу произвољне **LKprob**–теорије. Тада:

(1) Имамо да је $p(A \vdash A) = 1$, јер је $A \vdash^1 A$ аксиома.

(2) Ако је $p(AB \vdash) = 1$, $p(\vdash A) = c_1$ и $p(\vdash B) = c_2$, тада, по адитивности, изводимо $p(\vdash AB) = p(\vdash A) + p(\vdash B)$, за било које формуле A и B.

(3) Из претходне леме и тврђења 2.1.1 и 2.1.2, закључујемо да ако су секвенти $\Gamma \vdash \Delta$ и $\Pi \vdash \Lambda$ еквивалентни у **LK**, онда секвенти $\Gamma \vdash \Delta$ и $\Pi \vdash \Lambda$ имају исте вероватноће у канонском моделу. □

Теорема 2.1.24. *(Теорема потпуности) Свака непротивречна* **LKprob**–*теорија има модел.*

Доказ. Имајући у виду да свака непротивречна **LKprob**–теорија може бити проширена до максималне непротивречне **LKprob**–теорије, и да је таква једна описана управо као канонски модел, довољно је доказати да за сваку непротивречну теорију постоји један свет канонског модела који задовољава ту теорију. □

2.2 Вероватносни рачун секвената LKprob(ε)

Овај део текста је битно базиран на објављеном чланку [16], и саопштењима [17] и [18] аутора.

У већини емпиријских истраживања закључак се може свести на облик 'скуп закључака Δ следи из скупа хипотеза Γ у m од n случајева', при чему су најзначајнији искази они за које тврдимо да су тачни са високом вероватноћом, док се класична логика бави исказима облика 'скуп закључака Δ следи из скупа хипотеза Γ', односно '$\Gamma \vdash \Delta$'. Наш циљ је да формализујемо систем у коме ће искази имати форму '$\Gamma \vdash \Delta$ са вероватноћом најмање p', и у те сврхе дефинишемо вероватносни рачун секвената **LKprob**(ε) као проширење Gentzen–овог класичног исказног рачуна секвената **LK**. У рачуну **LKprob**(ε) секвенти су облика $\Gamma \vdash^n \Delta$, са значењем 'вероватноћа секвента $\Gamma \vdash \Delta$ припада интервалу $[1 - n\varepsilon, 1]$'.

2.2.1 Аксиоме и правила извођења у LKprob(ε)

Сваком $\varepsilon > 0$ облика $\varepsilon = \frac{1}{k}$, за $k \in \mathbf{N}$, придружујемо вероватносни рачун **LKprob**(ε) над исказним формулама на следећи начин. Сваки секвент $\Gamma \vdash \Delta$ из **LK** дефинише секвенте у **LKprob**(ε) облика $\Gamma \vdash^n \Delta$, где је $n \in \mathbf{N}$. Исказне формуле се граде над исказним језиком, као у Дефиницији 1.1.1. За било које речи Γ и Δ, и било који $n \in \mathbf{N}$, такав да је $[1 - n\varepsilon, 1] \subseteq [0, 1]$, $\Gamma \vdash^n \Delta$ је секвент у

LKprob(ε). У случају да је $n\varepsilon \geq 1$, по дефиницији узимамо да је $1-n\varepsilon$ једнако 0.

У наставку следе аксиоме и две групе правила извођења – структурна и логичка, рачуна секвената **LKprob**(ε).

Аксиоме рачуна **LKprob**(ε) су

$$A \vdash^0 A$$

$$\Gamma \vdash^k \Delta,$$

за произвољне речи Γ и Δ, и произвољну формулу A.

Структурна правила **LKprob**(ε) су:

пермутација:

$$\frac{\Gamma A B \Pi \vdash^n \Delta}{\Gamma B A \Pi \vdash^n \Delta}(P\vdash) \qquad \frac{\Gamma \vdash^n \Delta A B \Lambda}{\Gamma \vdash^n \Delta B A \Lambda}(\vdash P)$$

контракција:

$$\frac{\Gamma A A \vdash^n \Delta}{\Gamma A \vdash^n \Delta}(C\vdash) \qquad \frac{\Gamma \vdash^n A A \Delta}{\Gamma \vdash^n A \Delta}(\vdash C)$$

слабљење:

$$\frac{\Gamma \vdash^n \Delta}{\Gamma A \vdash^n \Delta}(W\vdash) \qquad \frac{\Gamma \vdash^n \Delta}{\Gamma \vdash^n A \Delta}(\vdash W)$$

правило сечења:

$$\frac{\Gamma \vdash^n A\Delta \quad \Pi A \vdash^m \Lambda}{\Gamma\Pi \vdash^{m+n} \Delta\Lambda}(\mathrm{cut})$$

два специфична правила која се тичу *монотоности*:

$$\frac{\Gamma \vdash^n \Delta}{\Gamma \vdash^m \Delta}(M\uparrow)$$

за све m ($m \geq n$), и *адитивност*:

$$\frac{AB \vdash^0 \quad \vdash^m A \quad \vdash^n B}{\vdash^{m+n-k} AB}(ADD)$$

где је $k\varepsilon = 1$.

Логичка правила рачуна **LKprob**(ε) су следећа:

$$\frac{\Gamma \vdash^n A\Delta}{\Gamma\neg A \vdash^n \Delta}(\neg\vdash) \qquad \frac{\Gamma A \vdash^n \Delta}{\Gamma \vdash^n \neg A\Delta}(\vdash\neg)$$

$$\frac{\Gamma AB \vdash^n \Delta}{\Gamma A\wedge B \vdash^n \Delta}(\wedge\vdash) \qquad \frac{\Gamma \vdash^n A\Delta \quad \Gamma \vdash^m B\Delta}{\Gamma \vdash^{m+n} A\wedge B\Delta}(\vdash\wedge)$$

$$\frac{\Gamma A \vdash^n \Delta \quad \Gamma B \vdash^m \Delta}{\Gamma A\vee B \vdash^{m+n} \Delta}(\vee\vdash) \qquad \frac{\Gamma \vdash^n AB\Delta}{\Gamma \vdash^n A\vee B\Delta}(\vdash\vee)$$

$$\frac{\Gamma \vdash^n A\Delta \quad \Pi B \vdash^m \Lambda}{\Gamma\Pi A\rightarrow B \vdash^{m+n} \Delta\Lambda}(\rightarrow\vdash) \qquad \frac{\Gamma A \vdash^n B\Delta}{\Gamma \vdash^n A\rightarrow B\Delta}(\vdash\rightarrow)$$

Претходно представљена правила могу се директно оправдати коришћењем Boole–ове и Bonferroni–јеве неједнакости.

Дефиниција 2.2.1. **LKprob**(ε)*—теорија над секвентима* $\sigma_1,\ldots,\sigma_m$*, означену са* **LKprob**$(\varepsilon)(\sigma_1,\ldots,\sigma_m)$*, је проширење рачуна секвената* **LKprob**(ε) *новим секвентима* σ_i *облика* $\Gamma_i \vdash^{n_i} \Delta_i$ $(1\le i\le m)$*, који се третирају као додатне аксиоме у систему.*

Дефиниција 2.2.2. *Докази у* **LKprob**$(\varepsilon)(\sigma_1,\ldots,\sigma_m)$ *имају форму дрвета, где су почетни чворови аксиоме и свако гранање је у складу са правилима извођења система* **LKprob**(ε).

Дефиниција 2.2.3. *Секвент* $\Gamma \vdash^n \Delta$ *је доказив у* **LKprob**$(\varepsilon)(\sigma_1,\ldots,\sigma_m)$ *ако постоји дрво доказа у* **LKprob**$(\varepsilon)(\sigma_1,\ldots,\sigma_m)$ *које се завршава секвентом* $\Gamma \vdash^n \Delta$.

Сада ћемо навести примере који описују доказе у нашем систему. Прва два примера садрже интерпретацију формула, док су друга два уопштенија.

Пример 2.2.4. *Нека формуле* A, B, C, D *и* E *имају следећу интерпретацију:* A*–испитаник је женског пола,* B*–испитаник је високообразован,* C*–испитаник је магистар или доктор наука,* D*–испитаник има висока примања,* E*–испитаник поседује бар једну некретнину. Анкетриањем одређеног броја испитаника добијену су следећи резултати: (i) вероватноћа да испитаник има висока примања, ако је женског пола и високообразован је бар 0.873, (ii) вероватноћа да испитаник поседује бар једну некретнину уколико је женског пола и високообразован износи бар 0.794 и (iii) вероватноћа да испитаник није магистар или доктор наука уколико је женског пола је бар 0.951. Претходни* *искази представљају додатне аксиоме нашег система* $\mathbf{LKprob}(10^{-3})$*, и могу се записати у следећем облику: (i)* $AB \vdash^{127} D$*, (ii)* $AB \vdash^{206} E$ *и (iii)* $A \vdash^{49} \neg C$*. Из доказа*

$$\dfrac{\dfrac{AB \vdash^{127} D \quad AB \vdash^{206} E}{AB \vdash^{333} D \wedge E}(\vdash \wedge) \qquad \dfrac{\dfrac{A \vdash^{49} \neg C}{AC \vdash^{49}}(\neg \vdash)}{AC \vdash^{49} D \wedge E}(\vdash W)}{A(B \vee C) \vdash^{382} D \wedge E}(\vee \vdash)$$

закључујемо да вероватноћа да особа женског пола која је високообразована или је магистар или доктор наука поседује бар једну некретнину и има висока примања износи најмање $1 - 382 \cdot 10^{-3} = 0.618$.

Напоменимо да је наш систем посебно користан у случајевима када нам није доступна цела база са подацима истраживања или анкете, него су доступни искључиво закључци (у овом примеру то су хипотезе (i), (ii) и (iii)).

Пример 2.2.5. *Нека формуле* A, B, C, D, E, F *и* G *респективно представљају следеће симптоме и дијагнозе: кашаљ, кијавица, осип на кожи, алергија 1, алергија 2, прехлада и грип. Претпоставимо да се у* n *база налазе информације о пацијентима током* n *година, и да те информације чине следећи скуп хипотеза* $B \vdash^5 D$, $BG \vdash^{10} E$, $A \vdash^3 FG$ *и* $AC \vdash^8 (D \wedge E)F$*, где је* $\varepsilon = 10^{-2}$*. Хипотеза* $B \vdash^5 D$ *значи да је вероватноћа да пацијент има алергију 1 уколико има кијавицу бар* 0.95*. Уколико желимо да израчунамо вероватноћу да пацијент има обе алергије* $(D \wedge E)$ *или да је прехлађен* (F) *уколико кашље* (A) *и, кија или има осип* $(B \vee C)$*, то мозехмо урадити у* $\mathbf{LKprob}(10^{-2})$ *на следећи начин:*

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{B \vdash^5 D}{AB \vdash^5 DF}(W\vdash, \vdash W) \qquad \dfrac{A \vdash^3 FG \quad BG \vdash^{10} E}{AB \vdash^{13} FE}(cut)}{AB \vdash^{18} (D \wedge E)F}(\wedge \vdash) \qquad AC \vdash^8 (D \wedge E)F}{A(B \vee C) \vdash^{26} (D \wedge E)F}(\vdash \vee)$$

Дакле, закључујемо да поменута вероватноћа припада интервалу $[1-26\varepsilon, 1] = [0.74, 1]$.

Пример 2.2.6. *У овом примеру приказаћемо како правило адитивности повећава вероватноћу, односно сужава интервал. Нека су додатне аксиоме у*

LKprob(10^{-1})*:* $\vdash^6 A$, $\vdash^8 B$, $\vdash^7 C$, $AB \vdash^0$, $A \vee BC \vdash^0$ *и* $\Gamma A \vee B \vdash^1 \Delta$. *Доказаћемо да вероватноћа секвента* $\Gamma \vdash C\Delta$ *припада интервалу* $[0.8, 1]$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{AB \vdash^0 \quad \vdash^6 A \quad \vdash^8 B}{\vdash^4 A \vee B}(ADD)(\vdash \vee) \qquad \vdash^7 C \quad A \vee BC \vdash^0}{\vdash^1 A \vee BC}(ADD)(\vdash \vee) \qquad \Gamma A \vee B \vdash^1 \Delta}{\Gamma \vdash^2 C\Delta}(cut)$$

Пример 2.2.7. *У овом примеру користићемо правила* $(\vdash \wedge)$, $(\neg \vdash)$ *и* $(\rightarrow\vdash)$. *Нека су додатне аксиоме у* **LKprob**(10^{-2})*:* $\Gamma \vdash^3 A\Delta$, $\Gamma \vdash^{10} C$ *и* $\Pi \vdash^7 \Lambda B$. *Тада имамо*

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash^3 A\Delta \qquad \frac{\Gamma \vdash^{10} C}{\Gamma \vdash^{10} C\Delta}(\vdash W)}{\Gamma \vdash^{13} A \wedge C\Delta}(\vdash \wedge) \qquad \dfrac{\dfrac{\Pi \vdash^7 \Lambda B}{\Pi \vdash^7 B\Lambda}(\vdash P)}{\Pi \neg B \vdash^7 \Lambda}(\neg \vdash)}{\Gamma\Pi(A \wedge C \rightarrow \neg B) \vdash^{20} \Delta\Lambda}(\rightarrow\vdash)$$

и закључујемо да је вероватноћа секвента $\Gamma\Pi(A \wedge C \rightarrow \neg B) \vdash \Delta\Lambda$ *бар* 0.8.

2.2.2 Модели и сагласност правила извођења

Сада ћемо дефинисати моделе за **LKprob**(ε) и доказати тврђења која се тичу сагласности правила извођења.

Дефиниција 2.2.8. *Нека је* $I = \{1 - n\varepsilon | n \in \mathbf{N}\}$. *Модел за* **LKprob**$(\varepsilon)$ *је пресликавање* $p : Seq \rightarrow I \cap [0, 1]$ *које задовољава следеће услове:*

(i) $p(A \vdash A) = 1$, *за сваку формулу* A*;*

(ii) ако је $p(AB \vdash) = 1$, *онда је* $p(\vdash AB) = p(\vdash A) + p(\vdash B)$, *за све формуле* A *и* B*;*

(iii) ако су секвенти $\Gamma \vdash \Delta$ *и* $\Pi \vdash \Lambda$ *еквивалентни у* **LK**, *у смислу да постоје докази за секвенте* $\bigwedge \Gamma \rightarrow \bigvee \Delta \vdash \bigwedge \Pi \rightarrow \bigvee \Lambda$ *и* $\bigwedge \Pi \rightarrow \bigvee \Lambda \vdash \bigwedge \Gamma \rightarrow \bigvee \Delta$ *у* **LK**, *онда је* $p(\Gamma \vdash \Delta) = p(\Pi \vdash \Lambda)$.

Напоменимо да се претходно наведени услови могу повезати са Carnap–овим [28] и Popper–овим [93] аксиомама вероватноће формула, које су варијација аксиома представљених од стране Leblanc–а и van Fraassen–а (в. [66], [67] и [65]).

Дефиниција 2.2.9. *Секвент* $\Gamma \vdash^n \Delta$ *је задовољен у моделу* p*, у ознаци* $\models_p \Gamma \vdash^n \Delta$*, ако важи* $p(\Gamma \vdash \Delta) \geq 1 - n\varepsilon$*. Секвент* $\Gamma \vdash^n \Delta$ *је ваљан ако је задовољен у сваком моделу, у ознаци* $\models \Gamma \vdash^n \Delta$*.*

Имајући у виду тврђења 2.1.8 и 2.1.10, наводимо још неке особине пресликавања p које ће касније бити коришћене у доказу теореме потпуности.

Лема 2.2.10. *Аксиоме система* $\mathbf{LKprob}(\varepsilon)$ *су ваљане.*

Доказ. $\models_p A \vdash^0 A$ важи јер је $p(A \vdash A) = 1$. Такође, $\models_p \Gamma \vdash^k \Delta$ важи, јер је $p(\Gamma \vdash \Delta) \in [0, 1]$. □

Лема 2.2.11. *За све формуле* A*,* B*,* Γ*,* Δ*,* Π *и* Λ*, важи:*

(a) ако је $p(\Gamma \vdash A\Delta) \geq 1 - n\varepsilon$ *и* $p(\Gamma \vdash B\Delta) \geq 1 - m\varepsilon$*, онда је*

$$p(\Gamma \vdash A \wedge B\Delta) \geq 1 - (m+n)\varepsilon;$$

(b) ако је $p(\Gamma A \vdash \Delta) \geq 1 - n\varepsilon$ *и* $p(\Gamma B \vdash \Delta) \geq 1 - m\varepsilon$*, онда је*

$$p(\Gamma A \vee B \vdash \Delta) \geq 1 - (m+n)\varepsilon;$$

(c) ако је $p(\Gamma \vdash A\Delta) \geq 1 - n\varepsilon$ *и* $p(\Pi B \vdash \Lambda) \geq 1 - m\varepsilon$*, онда је*

$$p(\Gamma\Pi A \to B \vdash \Delta\Lambda) \geq 1 - (m+n)\varepsilon.$$

Доказ. (c) Нека је $p(\Gamma \vdash A\Delta) \geq 1 - n\varepsilon$ и $p(\Pi B \vdash \Lambda) \geq 1 - m\varepsilon$, онда

$$\begin{aligned} p(\Gamma\Pi A \to B \vdash \Delta\Lambda) &= p(\vdash (A \wedge \neg B)\Delta\Lambda\neg(\bigwedge\Gamma)\neg(\bigwedge\Pi)) = \\ = p(\vdash (A \vee \Delta \vee \Lambda \vee \neg(\bigwedge\Gamma) \vee \neg(\bigwedge\Pi)) &\wedge (\neg B \vee \Delta \vee \Lambda \vee \neg(\bigwedge\Gamma) \vee \neg(\bigwedge\Pi))) = \\ = p(\vdash A\Delta\Lambda\neg(\bigwedge\Gamma)\neg(\bigwedge\Pi)) &+ p(\vdash \neg B\Delta\Lambda\neg(\bigwedge\Gamma)\neg(\bigwedge\Pi)) - \\ &- p(\vdash A\neg B\Delta\Lambda\neg(\bigwedge\Gamma)\neg(\bigwedge\Pi)) \geq \\ &\geq p(\vdash A\Delta\neg(\bigwedge\Gamma)) + p(\vdash \neg B\Lambda\neg(\bigwedge\Pi)) - 1 = \\ &= p(\Gamma \vdash A\Delta) + p(\Pi B \vdash \Lambda) - 1 \end{aligned}$$

Дакле, $p(\Gamma\Pi A \to B \vdash \Delta\Lambda) \geq 1 - (m+n)\varepsilon$. □

У следећој леми представљамо вероватносне верзије правила *modus ponens, modus tollens* и хипотетичког силогизма, што касније користимо у доказу сагласности правила сечења.

<u>**Лема**</u> **2.2.12.** *(a) (T. Hailperin [52]) (Вероватносна верзија правила modus ponens) Ако је* $p(\vdash A) \geq 1 - i\varepsilon$ *и* $p(A \vdash B) \geq 1 - m\varepsilon$*, онда*

$$p(\vdash B) \geq 1 - (i + m)\varepsilon$$

(b) (C. G. Wagner [115]) (Вероватносна верзија правила modus tollens) Ако је $p(A \vdash B) \geq 1 - m\varepsilon$ *и* $p(\vdash B) \geq 1 - j\varepsilon$*, онда*

$$p(A \vdash) \geq 1 - (j + m)\varepsilon$$

(c) (M. Боричић [16]) (Вероватносна верзија правила хипотетичког силогизма) Ако је $p(\vdash A) \geq 1 - i\varepsilon$*,* $p(\vdash B) \geq 1 - j\varepsilon$ *и* $p(\vdash C) \geq 1 - k\varepsilon$*, онда*

$$p(A \vdash C) \geq 1 - (j + k)\varepsilon$$

(d) (M. Боричић [16]) (Вероватносна верзија правила хипотетичког силогизма) Ако је $p(A \vdash B) \geq 1 - m\varepsilon$ *и* $p(B \vdash C) \geq 1 - n\varepsilon$*, онда*

$$p(A \vdash C) \geq 1 - (m + n)\varepsilon$$

Границе у (a), (b), (c) и (d) су најбоље могуће.

Доказ ове леме се може добити као непосредна последица Леме 2.1.12.

Напоменимо да Wagner [115] истиче разлику између Hailperin–овог [51] и [52], и Suppes–овог [105] приступа. T. Hailperin је у [51] развио метод за рачунање најбољих граница вероватноће логичке функције, заснован на методама линеарног програмирања. По њему, M. Fréchet [41] је први доказао да су познате неједнакости Boole–а и Bonferroni–ја са најбољим могућим границама.

Делови *(c)* и *(d)* из претходне леме представљају уопштење Suppes–овог (вероватносна верзија правила *modus ponens*) и Wagner–овог (вероватносна верзија правила *modus tollens*) резултата. Такође, као директну последицу претходне леме добијамо сагласност правила сечења:

<u>Лема</u> 2.2.13. *Ако* $p(\Gamma \vdash A\Delta) \geq 1 - m\varepsilon$ *и* $(\Pi A \vdash \Lambda) \geq 1 - n\varepsilon$*, онда*

$$p(\Gamma\Pi \vdash \Delta\Lambda) \geq 1 - (m+n)\varepsilon.$$

2.2.3 Појам непротивречности

С обзиром да негација секвента у језику не постоји, појам противречности се дефинише на начин који није традиционалан.

<u>Дефиниција</u> 2.2.14. *Теорија* $\mathbf{LKprob}(\varepsilon)(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ *је непротивречна ако и само ако постоји секвент* $\Gamma \vdash^0 \Delta$ *који није доказив у* $\mathbf{LKprob}(\varepsilon)(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$*. У супротном, кажемо да је противречна.*

У случају да је теорија противречна, сваки секвент је доказив.

<u>Дефиниција</u> 2.2.15. *Непротивречна теорија је максимална ако и само ако је свако њено право проширење противречна теорија.*

Следи Лема о максималној непротивречној теорији, коју користимо у доказу потпуности рачуна $\mathbf{LKprob}(\varepsilon)$ у односу на описане моделе.

<u>Лема</u> 2.2.16. *Свака непротивречна теорија се може проширити до максималне непротивречне теорије.*

Доказ. Нека је $\mathcal{T}$ непротивречна теорија и нека је $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$ низ секвената из **LKprob**, прецизније: α_n је секвент $\Gamma_n \vdash \Delta_n$. Нека је за сваки $k \in \{0, 1, \ldots, m\}$, при чему је $m = \min\{p | p \in \mathbf{N}$ и $1 - p\varepsilon \leq 0\}$, α_n^k низ секвената са лабелом, тј. α_n^k је $\Gamma_n \vdash^k \Delta_n$. За сваки $n \in \{0, 1, \ldots\}$, дефинишемо теорију $\mathcal{T}_n$ на следећи начин: $\mathcal{T}_0 = \mathcal{T}$, и $\mathcal{T}_{n+1} = \mathcal{T}_n \cup \{\alpha_n^0\}$ ако је непротивречна, у супротном, $\mathcal{T}_{n+1} = \mathcal{T}_n \cup \{\alpha_n^1\}$ ако је непротивречна, у супротном, ..., $\mathcal{T}_{n+1} = \mathcal{T}_n \cup \{\alpha_n^{m-1}\}$, у супротном, $\mathcal{T}_{n+1} = \mathcal{T}_n \cup \{\alpha_n^m\}$. Имајући у виду претходну конструкцију, следи да је теорија $\mathcal{T}' = \cup_{n \in \mathbf{N}} \mathcal{T}_n$ такође непротивречна. Теорија $\mathcal{T}'$ је истовремено и максимално непротивречно проширење теорије $\mathcal{T}$. Претпоставимо да теорији $\mathcal{T}'$ додамо секвент $\Gamma_k \vdash^t \Delta_k$. Ако је секвент $\Gamma_k \vdash^s \Delta_k$, за неки $s < t$, већ припада теорији $\mathcal{T}'$, онда користећи правило монотоности $(M \uparrow)$, изводимо секвент $\Gamma_k \vdash^t \Delta_k$, што значи да $T' \cup \{\Gamma_k \vdash^t \Delta_k\}$ није право проширење теорије $\mathcal{T}'$. У случају да ниједан секвент $\Gamma_k \vdash^s \Delta_k$, за $s < t$, не припада теорији

$\mathcal{T}'$, имајући у виду дефиницију теорије $\mathcal{T}'$, она садржи секвент $\Gamma_k \vdash^l \Delta_k$ за неки $l > t$. Међутим, то није могуће, јер би то значило да је теорија $\mathcal{T}_k \cup \{\Gamma_k \vdash^t \Delta_k\}$ противречна, и самим тим би и теорија $\mathcal{T}' \cup \{\Gamma_k \vdash^t \Delta_k\}$ била противречна. $\square$

2.2.4 Сагласност и потпуност рачуна **LKprob**(ε)

Користећи Леме 2.1.8, 2.1.10, 2.2.10, 2.2.11, 2.2.12 и 2.2.16, у овом делу ћемо доказити сагласност и потпуност **LKprob**(ε)–теорије. Такође, у доказу биће конструисан и канонски модел.

Теорема 2.2.17. **LKprob**(ε)*–теорија има модел ако и само ако је непротивречна.*

Доказ. Сагласаност следи директно из Лема 2.1.8, 2.1.10, 2.2.10, 2.2.11 и 2.2.12. Потпуност се доказује на следећи начин: Претпоставимо да је теорија **LKprob**$(\varepsilon)(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ непротивречна. Сада ћемо конструисати канонски модел. Нека је CE(**LKprob**$(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$) класа свих максималних непротивречних проширења скупа свих секвената доказивих у **LKprob**$(\varepsilon)(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$. За произвољан $X \in$ CE(**LKprob**$(\varepsilon)(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$) дефинишемо $\models_{p^X} \Gamma \vdash^m \Delta$ ако и само ако $1 - m\varepsilon \leq p_X(\Gamma \vdash \Delta)$, где је $p_X(\Gamma \vdash \Delta) = 1 - \varepsilon \cdot \min\{n | \Gamma \vdash^n \Delta \in X\}$, са значењем $\models_{p^X} \Gamma \vdash^m \Delta$ ако и само ако $m \geq \min\{n | \Gamma \vdash^n \Delta \in X\}$. Из претходне дефиниције и правила монотоности $(M \uparrow)$ можемо закључити да је $\models_{p^X} \Gamma \vdash^m \Delta$ ако и само ако $\Gamma \vdash^m \Delta \in X$, што предтавља карактеристичну особину канонског модела. Такође, приметимо да овако конструисан канонски модел јесте модел, јер важи: (i) $p(A \vdash A) = 1$, зато што је $A \vdash^0 A$ аксиома; (ii) ако је $p(AB \vdash) = 1$, онда је $p(\vdash AB) = p(\vdash A) + p(\vdash B)$, за све формуле A и B, због правила адитивности; (iii) да једнакост $p(\Gamma \vdash \Delta) = p(\Pi \vdash \Lambda)$, где су секвенти $\Gamma \vdash \Delta$ и $\Pi \vdash \Lambda$ еквивалентни у **LK**, важи закључујемо из следећег разматрања. Из Леме 2.2.12(а) следи да ако су $\vdash^n A$ и $A \vdash^0 B$ доказиви у **LKprob**(ε), онда је и $\vdash^n B$ доказив у **LKprob**(ε). Коначно, како је X максималан непротивречан скуп, а свака непротивречна теорија се може проширити до максималне непротивречне теорије, постоји модел за **LKprob**(ε). $\square$

2.3 Вероватносни рачун природних дедукција NKprob

У овом поглављу представљамо вероватносну логику засновану на класичној логици исказа која омогућава рад са формулама облика $A[a, b]$ са значењем 'вероватноћа c истинитости исказа A припада интервалу $[a, b]$'. Систем **NKprob**, за сваки везник, садржи бар по једно правило извођења за увођење, и бар по једно за елиминацију везника, при чему су границе најбоље могуће. Такође, дефинишемо и моделе инспирисане Carnap–Popper–овим приступом (в. [28], [93], [66], [65]) у односу на које је систем потпун и сагласан. Излагање је битно базирано на ауторовом чланку [24].

2.3.1 Аксиоме и правила извођења у NKprob

Скуп исказних формула дефинишемо индуктивно над пребројивим скупом исказних слова и основних везника: $\neg$, $\wedge$, $\vee$ и $\rightarrow$. Скуп I је коначан подскуп скупа $[0, 1]$, који садржи 0 и 1, затворен за сабирање, тј. $a + b$ представља $\min(1, a + b)$, а $a + b - 1$ представља $\max(0, a + b - 1)$. Пример таквог скупа је $I = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\}$, за сваки $n \in \mathbf{N}$. Приметимо да је пресек свака два таква скупа, такође такав скуп.

<u>**Дефиниција**</u> **2.3.1.** *За сваку исказну формулу A и све $a, b \in I$, објекат $A[a, b]$ се назива вероватносном формулом.*

Специјални случајеви вероватносне формуле $A[a, b]$ су $A[a, a]$, за $a = b$, и $A\emptyset$, за $b < a$. Напоменимо да $A[a, b]$ представља $A[c, c]$, за неки $c \in [a, b]$. Како је I коначан, свака исказна формула A генерише коначан скуп вероватносних формула $A[a, b]$, $a, b \in I$. Комбиновање вероватносних формула посредством исказних везника није дозвољено у систему **NKprob**.

Аксиоме система **NKprob** су $A[1, 1]$, за сваку формулу A која је доказива у класичној логици исказа.

Правила извођења система **NKprob** су следећа, и односе се на увођење, односно елиминацију:

конјункције:

$$\frac{A[a,b] \quad B[c,d]}{(A\wedge B)[a+c-1,\min(b,d)]}(I\wedge) \qquad \frac{A[a,b] \quad (A\wedge B)[c,d]}{B[c,1+d-a]}(E\wedge)$$

дисјункције:

$$\frac{A[a,b] \quad B[c,d]}{(A\vee B)[\max(a,c),b+d]}(I\vee) \qquad \frac{A[a,b] \quad (A\vee B)[c,d]}{B[c-b,d]}(E\vee)$$

импликације:

$$\frac{A[a,b] \quad B[c,d]}{(A\rightarrow B)[\max(1-b,c),1-a+d]}(I\rightarrow) \qquad \begin{array}{c} \dfrac{A[a,b] \quad (A\rightarrow B)[c,d]}{B[a+c-1,d]}(E_1\rightarrow) \\ \dfrac{B[a,b] \quad (A\rightarrow B)[c,d]}{A[1-d,1-c+b]}(E_2\rightarrow) \end{array}$$

негације:

$$\frac{A[a,b]}{(\neg A)[1-b,1-a]}(I\neg) \qquad \frac{(\neg A)[a,b]}{A[1-b,1-a]}(E\neg)$$

правило *адитивности*:

$$\frac{A[a,b] \qquad B[c,d] \qquad (A\wedge B)[e,f]}{(A\vee B)[a+c-f,b+d-e]}(ADD)$$

које се може посматрати као додатни начин третирања правила $(E\wedge)$ и $(I\vee)$, два правила *монотоности*:

$$\frac{A[a,b] \quad A[c,d]}{A[\max(a,c),\min(b,d)]}(M\downarrow) \qquad \frac{A[a,b]}{A[c,d]}(M\uparrow)$$

где се у правилу $(M\uparrow)$ претпоставља да је $[a,b]\subseteq[c,d]$ и, коначно, два правила која се тичу *противречности*:

$$\frac{\dfrac{[A[c_1,c_1]]}{A\emptyset} \; \dfrac{[A[c_2,c_2]]}{A\emptyset} \; \ldots \; \dfrac{[A[c_m,c_m]]}{A\emptyset}}{A\emptyset}(I\emptyset) \qquad \frac{A\emptyset}{B[a,b]}(E\emptyset)$$

за све исказне формуле A и B, и све $a,b\in I=\{c_1,c_2,\ldots c_m\}$.

Правила $(E_1\rightarrow)$ и $(E_2\rightarrow)$ су заправо већ познате вероватносне верзије правила *modus ponens* и *modus tollens* (в. [52], [115]), и једно се може извести из другог и обрнуто. Такође, из $A[a,b]$ и $A[c,d]$, помоћу правила $(M\downarrow)$, изводимо $A\emptyset$, у случају $[a,b] \cap [c,d] = \emptyset$. Формула $A\emptyset$ везана је за противречност система, о чему ће бити речи касније. Правило $(I\emptyset)$ гарантује да се, за сваку исказну формулу A, вероватносна формула $A[0,1]$ може третирати као аксиома у **NKprob**, са значењем да је $A[c,c]$ задовољена, за неки $c \in [0,1]$. Правило $(E\emptyset)$ омогућава третирање противречности на традиционалан начин.

Извођење из хипотеза дефинишемо на класичан начин, индуктивно:

Дефиниција 2.3.2. *Формула $A[a,b]$ се може извести из скупа хипотеза Γ у* **NKprob** *ако постоји коначан низ вероватносних формула који се завршава са $A[a,b]$, такав да је свака од њих аксиома, припада Γ или је добијена применом неког* **NKprob**—*правила на неке од претходних формула у низу.*

Специјално, дупле линије које се појављују у правилу $(I\emptyset)$ представљају управо дефинисано извођење. Заправо, свако појављивање $[A[c,c]]$ значи да је могуће изоставити $A[c,c]$ из скупа хипотеза Γ. Прецизније, у овом случају скуп хипотеза се добија брисањем неких (или ниједног, или свих) појављивања формуле $A[c,c]$, уколико постоје.

Алтернативан начин представљања правила извођења у **NKprob** је помоћу секвената. На пример, правила $(I\vee)$, $(E\vee)$ и $(I\emptyset)$ би имала следећу форму:

$$\frac{\Gamma \vdash A[a,b] \quad \Delta \vdash B[c,d]}{\Gamma \cup \Delta \vdash (A \vee B)[\max(a,c), b+d]}(I\vee) \qquad \frac{\Gamma \vdash A[a,b] \quad \Delta \vdash (A \vee B)[c,d]}{\Gamma \cup \Delta \vdash B[c-b,d]}(E\vee)$$

$$\frac{\Gamma_1 \vdash A\emptyset \quad \Gamma_2 \vdash A\emptyset \quad \dots \quad \Gamma_m \vdash A\emptyset}{(\Gamma_1 \setminus A[c_1,c_1]) \cup (\Gamma_2 \setminus A[c_2,c_2]) \cup \dots \cup (\Gamma_m \setminus A[c_m,c_m]) \vdash A\emptyset}(I\emptyset)$$

Показаћемо да су сваке две формуле које су међусобно еквивалентне у класичној логици, еквидоказиве са истим интервалима у **NKprob**.

Лема 2.3.3. *За све исказне формуле A и B, ако је $A \leftrightarrow B$ доказива у класичној логици, и $A[a,b]$ доказива у* **NKprob**, *онда је $B[a,b]$ доказива у* **NKprob**.

Доказ. Приметимо да уколико је $A \leftrightarrow B$ доказива у класичној логици, онда, по дефиницији, формуле $(A \to B)[1,1]$ и $(B \to A)[1,1]$ су аксиоме у **NKprob**. Из $A[a,b]$ и $(A \to B)[1,1]$, помоћу правила *modus ponens* $(E_1 \to)$, изводимо $B[a,1]$. Са друге стране, из $A[a,b]$ и $(B \to A)[1,1]$, помоћу правила *modus tollens* $(E_2 \to)$, изводимо $B[0,b]$. Коначно, из $B[a,1]$ и $B[0,b]$, користећи правило монотоности $(M\downarrow)$, изводимо $B[a,b]$. $\square$

Директно из претходне Леме следи:

Последица 2.3.4. *Ако за исказне формуле A и B важи, ако је $A \leftrightarrow B$ доказива у класичној логици, и $A[a,a]$ доказива у* **NKprob**, *онда је $B[a,a]$ доказива у* **NKprob**.

Наводимо један пример извођења у **NKprob**.

Пример 2.3.5. *У овом примеру представљамо извођење формуле $((A \vee C) \wedge E)[0.3,0.8]$ из хипотеза $\neg B[0.2,0.3]$, $(A \to B)[0.8,1]$, $C[0.5,0.8]$, $D[0.9,1]$, $E[0.7,0.8]$ и $(A \wedge C \wedge E)[0.1,0.4]$. Применом правила за елиминацију негације и импликације, добијамо:*

$$\dfrac{\dfrac{\neg B[0.2,0.3]}{B[0.7,0.8]}(E\neg) \qquad (A \to B)[0.8,1]}{A[0.5,1]}(E_2 \to)$$

Затим, користећи претходно изведену формулу и применом правила за елиминацију конјункције и адитивности изводимо:

$$\dfrac{A[0.5,1] \quad C[0.5,0.8] \qquad \dfrac{D[0.9,1] \quad (A \wedge C \wedge D)[0.1,0.4]}{(A \wedge C)[0,0.4]}(E\wedge)}{A \vee C[0.6,1]}(ADD)$$

Коначно, из претходног извођења и хипотезе $E[0.7,0.8]$, добијамо:

$$\dfrac{(A \vee C)[0.6,1] \quad E[0.7,0.8]}{((A \vee C) \wedge E)[0.3,0.8]}(I\wedge)$$

2.3.2 NKprob–теорије

У овом поглављу дефинишемо појам непротивречне теорије и доказујемо теорему о максималној непротивречној теорији, која представља базу за доказ теореме потпуности у следећем поглављу.

<u>**Дефиниција**</u> **2.3.6.** *Под* **NKprob**–*теоријом (или само теоријом), у ознаци* $\mathbf{NKprob}(A_1[a_1,b_1],\dots,A_n[a_n,b_n])$*, подразумевамо скуп формула које се могу извести из скупа хипотеза* $A_1[a_1,b_1],\dots,A_n[a_n,b_n]$.

<u>**Дефиниција**</u> **2.3.7.** *Теорија* $\mathbf{NKprob}(A_1[a_1,b_1],\dots,A_n[a_n,b_n])$ *је противречна ако постоји исказ* A *такав да су вероватносне формуле* $A[a,b]$ *и* $A[c,d]$ *доказиве у* $\mathbf{NKprob}(A_1[a_1,b_1],\dots,A_n[a_n,b_n])$*, и* $[a,b]\cap[c,d]=\emptyset$*. У супротном, кажемо да је теорија непротивречна. Непротивречну теорију називамо максималном непротивречном теоријом уколико је свако њено право проширење противречно.*

<u>**Лема**</u> **2.3.8.** *Свака непротивречна теорија се може проширити до максималне непротивречне теорије.*

Доказ. Нека је $\mathcal{T}$ непротивречна теорија, нека је $A_0,A_1,\dots,A_n,\dots$ низ свих исказних формула, и за сваки $c\in I$, нека је $A_0[c,c],A_1[c,c],\dots,A_n[c,c],\dots$ низ одговарајућих вероватносних формула. Нека је $(\mathcal{T}_n)$ низ теорија дефинисан индуктивно на следећи начин: $\mathcal{T}_0=\mathcal{T}$, и $\mathcal{T}_{n+1}=\mathcal{T}_n\cup\{A_n[c_1,c_1]\}$, ако је непротивречна, а уколико је противречна, онда: $\mathcal{T}_{n+1}=\mathcal{T}_n\cup\{A_n[c_2,c_2]\}$, ако је непротивречна, а уколико је противречна, онда ... $\mathcal{T}_{n+1}=\mathcal{T}_n\cup\{A_n[c_{m-1},c_{m-1}]\}$, ако је непротивречна, и коначно, $\mathcal{T}_{n+1}=\mathcal{T}_n\cup\{A_n[c_m,c_m]\}$, иначе; где је $\{c_1,c_2,\dots,c_m\}=I$. Приметимо да коначан резултат претходне конструкције зависи од редоследа тачака $c_1,c_2,\dots,c_m$. Нека је

$$\mathcal{T}'=\cup_{n\in\omega}\mathcal{T}_n$$

Тада ћемо индукцијом по n доказати да је $\mathcal{T}'$ максимално непротивречно проширење теорије $\mathcal{T}$. Прво ћемо доказати да ако је $\mathcal{T}_n$ непротивречна, онда је и $\mathcal{T}_{n+1}$ непротивречна. Једини интересантан случај је $\mathcal{T}_{n+1}=\mathcal{T}_n\cup\{A_n[c_m,c_m]\}$, и он је оправдан правилом $(I\emptyset)$. Како бисмо доказали да је $\mathcal{T}'$ максимално непротивречно проширење теорије $\mathcal{T}$, проширићемо теорију $\mathcal{T}'$ вероватносном формулом $A_k[a,b]$. Уколико је то право проширење, већ имамо да теорија $\mathcal{T}_{k+1}\subset\mathcal{T}'$ садржи $A_k[c,c]$ за неки $c\notin[a,b]$, што значи да би ово проширење било противречно. $\square$

2.3.3 Модели, сагласност и потпуност

Модели у **NKprob**, које ћемо описати у овом поглављу, су инспирисани Carnap–овим и Popper–овим приступом (в. [28], [93], [66], [65]), тј. аксиоме модела су у грубој коресподенцији са њиховим аксиомама вероватноће исказа.

<u>**Дефиниција**</u> **2.3.9.** *Нека је* For *скуп свих исказних формула и* I *коначан подскуп скупа* $[0,1]$ *затворен за сабирање, који садржи* 0 *и* 1. *Тада се пресликавање* $p : For \to I$ *назива* **NKprob**–*моделом (или само моделом), ако задовољава следеће услове:*

(i) $p(\top) = 1$ *и* $p(\bot) = 0$

(ii) ако је $p(A \wedge B) = 0$, *онда* $p(A \vee B) = p(A) + p(B)$;

(iii) ако је $A \leftrightarrow B$ *у класичној логици, онда* $p(A) = p(B)$.

Сагласност правила адитивности и монотоности оправдава следећа Лема:

<u>**Лема**</u> **2.3.10.** *(a)* $p(A) + p(B) = p(A \vee B) + p(A \wedge B)$

(b) Ако је $A \to B$ *у класичној логици, онда је* $p(A) \leq p(B)$.

Доказ. *(a)* Из $p(A) = p((A \wedge \neg B) \vee (A \wedge B)) = p(A \wedge \neg B) + p(A \wedge B)$ и $p(A \vee B) = p((A \wedge \neg B) \vee B) = p(A \wedge \neg B) + p(B)$ изводимо $p(A) + p(B) = p(A \wedge B) + p(A \vee B)$.

(b) $p(B) = p(\neg A \vee B) + p(\neg A \wedge B) - p(\neg A) = p(\neg A \vee B) + p(\neg A \wedge B) - 1 + p(A) \geq p(A)$, јер је $p(A \to B) = p(\neg A \vee B) = 1$. □

<u>**Дефиниција**</u> **2.3.11.** *Кажемо да је вероватносна формула* $A[a,b]$ *задовољена у моделу* p, *у ознаци* $\models_p A[a,b]$ *ако и само ако је* $a \leq p(A) \leq b$. *Формула* $A[a,b]$ *је ваљана ако и само ако је задовољена у сваком моделу, у ознаци* $\models A[a,b]$.

Сагласност правила за увођење везника доказана је у следећој Леми:

<u>**Лема**</u> **2.3.12.** *(a)* $p(A) + p(B) - 1 \leq p(A \wedge B) \leq \min(p(A), p(B))$

(b) $\max(p(A), p(B)) \leq p(A \vee B) \leq p(A) + p(B)$

(c) $\max(1 - p(A), p(B)) \leq p(A \to B) \leq 1 - p(A) + p(B)$

(d) $p(\neg A) = 1 - p(A)$

Границе у (a), (b), и (c) су најбоље могуће.

Доказ. *(a)* Из претходне леме имамо $p(A \wedge B) = p(A) + p(B) - p(A \vee B) \geq p(A) + p(B) - 1$. Такође важи $p(A) = p((A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)) = p(A \wedge B) + p(A \wedge \neg B)$, односно $p(A \wedge B) = p(A) - p(A \wedge \neg B) \leq p(A)$. Слично, $p(A \wedge B) \leq p(B)$.

(b) $p(A \vee B) = p(A) + p(\neg A \wedge B) \geq p(A)$, и слично важи $p(A \vee B) \geq p(B)$. Горња граница се добија из $p(A \vee B) = p(A) + p(B) - p(A \wedge B) \leq p(A) + p(B)$.

(c) Ова неједнакост следи из $p(A \to B) = p(\neg A \vee B)$ и дела *(b)*.

(d) $1 = p(\top) = p(A \vee \neg A) = p(A) + p(\neg A)$. □

Сагласност правила за елиминацију везника доказана је у следећој Леми:

Лема 2.3.13. *(a) Ако је $a \leq p(A) \leq b$ и $c \leq p(A \wedge B) \leq d$, онда је $c \leq p(B) \leq d + 1 - a$.*

(b) Ако је $a \leq p(A) \leq b$ и $c \leq p(A \vee B) \leq d$, онда је $c - b \leq p(B) \leq d$.

(c) Ако је $a \leq p(A) \leq b$ и $c \leq p(A \to B) \leq d$, онда је $a + c - 1 \leq p(B) \leq d$.

(d) Ако је $a \leq p(\neg B) \leq b$ и $c \leq p(A \to B) \leq d$, онда је $a + c - 1 \leq p(\neg A) \leq d$.

Границе у (a), (b), (c) и (d) су најбоље могуће.

Доказ. *(a)* Важи $p(B) = p(A \wedge B) + p(\neg A \wedge B) \geq c$ и $p(B) = p(A \vee B) + p(A \wedge B) - p(A) \leq d - a + 1$. За $p(\neg A \wedge B) = 0$ и $p(A \vee B) = 1$, респективно, доња и горња граница се достижу, што значи да су ове границе најбоље.

(b) Имамо да је $p(B) = p(A \vee B) - p(\neg B \wedge A) \leq d$ и $p(B) = p(A \vee B) + p(A \wedge B) - p(A) \geq c - b$. За $p(\neg B \wedge A) = 0$ и $p(A \wedge B) = 0$ доња и горња граница се достижу.

(c) Користећи део *(b)*, претходну Лему део *(d)* и чињеницу $p(A \to B) = p(\neg A \vee B)$ добијамо $a + c - 1 \leq p(B) \leq d$. За $p(\neg A \wedge B) = 0$ и $p(\neg A \wedge \neg B) = 0$ доња и горња граница се достижу.

(d) Слично као део *(c)*. □

Сад ћемо формулисати Лему (в. [16]), која се тиче вероватносне верзије правила хипотетичког силогизма. Доказ је аналоган доказу Леме 2.1.13.

Лема 2.3.14. *(a) Из $A[a,a]$, $B[b,b]$ и $C[c,c]$ у* **NKprob** *изводимо:*

$$(A \to C)[\max(1 - a, b) + \max(1 - b, c) - 1, 2 - a - b + c].$$

(b) Из $A[a,a]$, $C[c,c]$, $(A \to B)[r,r]$ и $(B \to C)[s,s]$ у **NKprob** *изводимо:*

$$(A \to C)[\max(r - a, r + s - 1), \min(s + 1 - a, r + c)].$$

(c) Из $(A \to B)[a,b]$ *и* $(B \to C)[c,d]$ *у* **NKprob** *изводимо:*

$$(A \to C)[\max(0, a+c-1), \min(b+d, 1)].$$

Границе у (a), (b) и (c) су најбоље.

Као последицу претходних лема добијамо теорему сагласности:

Теорема 2.3.15. *Ако* **NKprob***–теорија има модел, онда је непротивречна.*

Доказ. Индукцијом по дужини доказа произвољне формуле $A[a,b]$ која је доказива у **NKprob** можемо доказати да је систем **NKprob** сагласан, што следи директно из тврђења 2.3.10—2.3.14. Нагласимо да је правило $(I\emptyset)$ оправдано чињеницом да је модел пресликавање $p : \mathrm{For} \to I$. То повлачи да је сваки скуп формула $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ који је задовољен, такође и непротивречан у **NKprob**. $\square$

Да бисмо доказали теорему потпуности, дефинисаћемо појам канонског модела. Нека је $\mathrm{Cn}(\mathbf{NKprob}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n))$ скуп свих $\mathbf{NKprob}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$–доказивих формула и $\mathrm{ConExt}(\mathrm{Cn}(\mathbf{NKprob}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)))$ класа свих његових максималних непротивречних проширења (постојање је оправдано Лемом 2.3.8).

Дефиниција 2.3.16. *За сваки* $X \in \mathit{ConExt}(\mathit{Cn}(\mathbf{NKprob}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)))$ *дефинишемо*

$$\models_{p^X} A[a,b] \quad \text{акко} \quad a \leq \max\{c | A[c,1] \in X\} \text{ и } b \geq \min\{c | A[0,c] \in X\}.$$

p^X *се назива канонским моделом.*

Ради јаснијег и краћег записа, изостављаћемо X из ознаке p^X. Важи:

Лема 2.3.17. *Канонски модел је модел.*

Доказ. Нека је p пресликавање дефинисано изнад на произвољном максимално непротивречном скупу неке **NKprob**–теорије. Тада:

(1) Имамо да је $p(A) = 1$, за сваку формулу A која је доказива у класичној логици, јер је $A[1,1]$ аксиома.

(2) Ако је $p(A \wedge B) = 0$, $p(A) = a$ и $p(B) = b$, онда директно по правилу адитивности изводимо $p(A \wedge B) = a + b$, за произвољне формуле A и B.

(3) Из тврђења 2.3.4 и 2.3.10 имамо да ако су формуле A и B еквивалентне у класичној логици, онда имају исте вероватноће у канонском моделу . $\square$

Лема 2.3.18. $\models_{p^X} A[a,b]$ *ако и само ако* $A[a,b] \in X$.

Доказ. Из $\models_{p^X} A[a,b]$, претходне дефиниције и правила монотоности $(M\uparrow)$, имамо $A[a,1] \in X$. Слично, важи $A[0,b] \in X$, одакле из правила монотоности $(M\downarrow)$, закључујемо $A[a,b] \in X$. Обрнуто, ако $A[a,b] \in X$, онда, како је X дедуктивно затворен, користећи правило монотоности $(M\uparrow)$, $A[a,1] \in X$, па је $a \leq \max\{c|A[c,1] \in X\}$. Слично, $A[0,b] \in X$, па важи $b \geq \min\{c|A[0,c] \in X\}$. Дакле, имамо да је $\models_{p^X} A[a,b]$. $\square$

Теорема 2.3.19. *Свака непротивречна* **NKprob**–*теорија има модел.*

Доказ. Имајући у виду да се свака непротивречна теорија може проширити до максималне непротивречне теорије, а она је описана као канонски модел, довољно је доказати да за сваку непротивречну теорију постоји свет из канонског модела који је задовољава. $\square$

2.4 Рачун секвената расплинуте логике LKfuz

Овај део текста је суштински базиран на једном необјављеном чланку и саопштењу [16] аутора. Наша централна тема ће овде бити поступак придруживања расплинуте логике класичној логици исказа.

Основне принципе расплинуте логике је успоставио L. A. Zadeh [121], а касније су их унапређивали и развијали многи други аутори (в. [30] и [31]). Инспиративну и занимљиву коресонденцију између дедуктивних система (*the crisp deduction systems*) и расплинутих дедуктивних система (*the fuzzy deduction systems*) разматрали су J. Pavelka [92], G. Gerla [48] и R. Tortora [49]. У раду G. Metcalfe–ја [78] разматра се рачун хиперсеквената расплинуте логике, концепцијски битно различит од нашег приступа.

Обично се под расплињењем једног скупа (*fuzzification of a crisp set*) S подразумева било које пресликавање фамилије $\mathcal{S} = \{X|S \subseteq X\}$ надскупова (или чак надскупова и подскупова заједно) скупа S у комплетну Heyting–ову алгебру. Следећи ову идеју, под расплињењем логике (*fuzzification of a crisp logic*) $\mathcal{L}$

сматрамо било које придруживање сваком проширењу логике $\mathcal{L}$ једне вредности коначне мреже са више од два елемента. Овакав приступ нам омогућава да дефинишемо расплинућа логичких теорија заснованих на класичној исказној логици. Наиме, овде истражујемо како да дефинишемо појам расплинуте релације дедукције $\vdash_x$ генерисане релацијом дедукције $\vdash$ класичне логике, а која је повезана са елементима x једне коначне мреже која мери расплинутост дедукције.

Разматраћемо проширења класичне логике исказа дефинисане у стилу Gentzen–а (в. [47] или [106]). Овакав приступ ће омогућити да класификујемо исказе класичних теорија, тј. нелогичких проширења класичне логике, помоћу елемената неке коначне мреже, а у складу са принципима расплинутог расуђивања. Обично, за било који скуп исказа $\Gamma \cup \{A\}$, изразом $\Gamma \vdash_x A$ означавамо да се 'A може извести из Γ у контексту x'. Циљ нам је да овде развијемо рачун формалног рада са изразима оваквог облика. Руководимо се принципом да ако је $\Gamma \vdash A$ доказив у контексту x, онда је $\Gamma \vdash A$ доказив и у сваком ширем контексту y. Сматрајући да има много разлога за поистовећење 'контекста' са 'расплинућем', шири контекст можемо увек схватити као виши степен расплинутости. Верујемо да наш систем поседује специфичан ниво апстрактности који пружа боље разумевање односа између једне стриктне логике и њених неодређених, непрецизних и нејасних форми. Такође, наглашавамо овде да формални системи који се баве апроксимативним расуђивањем са значајним доказ–теоретским својствима су веома ретки. Ми ћемо овде развити један са својством елиминације сечења (*the cut–elimination property*).

Овај део рада је компонован на следећи начин. Први део се бави синтаксним особинама нашег система **LKfuz**, који представља проширење Gentzen–овог оригиналног рачуна секвената **LK** класичне логике исказа. Дефинишемо **LKfuz** преко одговарајућих аксиома и правила извођења, и уводимо појам непротивречне **LKfuz**–теорије. Следи доказ теореме о елиминацији правила сечења за рачун **LKfuz**, са одлучивошћу као последицом. У другом делу разматрамо семантику за **LKfuz** и уводимо моделе у односу на које је рачун **LKfuz** потпун. Теореме сагласности и потпуности чине мост између синтаксе и семантике нашег система, и дају неопходно оправдање модела за уведено расплинуће релације дедукције.

Систем **LKfuz** може послужити као добра основица за рад са емпиријским подацима облика $\Gamma_i \vdash_{x_i} \Delta_i$, где сваки секвент третирамо као нову нелогичку аксиому система **LKfuz**. У овом случају **LKfuz** постаје механизам, попут програма, који производи закључке истог облика. Такво проширење система **LKfuz** подацима σ_i, где је σ_i скраћеница за $\Gamma_i \vdash_{x_i} \Delta_i$, за сваки i $(1 \leq i \leq n)$, заједно са свим својим последицама, представљаће једну **LKfuz**–теорију коју ћемо означавати са $\mathbf{LKfuz}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$.

Верујемо да се конструкција система **LKfuz** може проширити и на друге логичке системе, посебно на рачуне секвената исказних логика које представљају проширења Heyting–ове логике (в. [43]), али је отворено питање да ли је могуће дефинисати семантику у том случају на сличан начин као што ћемо то урадити у случају нашег система **LKfuz**.

2.4.1 Расплинуће релације дедукције класичне логике

Уводимо проширење **LKfuz** Gentzen–овог рачуна секвената **LK** на језику исказа на следећи начин. Сваком (неозначеном) секвенту $\Gamma \vdash \Delta$ рачуна **LK**, за сваки x, који је елемент коначне најмање 3–елементне мреже (в. [9]) са нулом и јединицом, придружујемо означени секвент $\Gamma \vdash_x \Delta$ рачуна **LKfuz** са значењем 'расплинутост секвента $\Gamma \vdash \Delta$ је најмање x'. Систем **LKfuz** се може посматрати и као једна врста рачуна означених секвената (labelled sequent calculus) попут оног категоријалног развијеног код M. E. Szabo–а [106] (в. такође [44]). Другим речима, полазимо од најмање 3–елементне мреже $\langle L, \cap, \cup, 0, 1\rangle$ са пресеком $\cap$, унијом $\cup$, нулом 0 и јединицом 1 и скупа свих (неозначених) секвената Seq. Тада, сваком $\Gamma \vdash \Delta \in \mathrm{Seq}$ и сваком $x \in L$, придружујемо један означени секвент $\Gamma \vdash_x \Delta$. Ово повезивање елемената скупа Seq са елементима скупа L биће добра основица за дефинисање одговарајуће функције припадности која карактерише степен припадности једног елемента расплинутом скупу.

У наставку ћемо, подсећамо, редом са For и W(For) означавати скуп свих исказних формула и скуп свих речи над скупом исказних формула.

Аксиоме система **LKfuz** представљају следећа два секвента:

$$A \vdash_0 A$$

$$\Gamma \vdash_1 \Delta$$

за све $A \in \mathrm{For}$ и све $\Gamma \vdash \Delta \in \mathrm{Seq}$.

Структурна правила извођења рачуна **LKfuz** су следећа:

permutacija:
$$\frac{\Gamma A B \Pi \vdash_x \Delta}{\Gamma B A \Pi \vdash_x \Delta}(P\vdash) \qquad \frac{\Gamma \vdash_x \Delta A B \Lambda}{\Gamma \vdash_x \Delta B A \Lambda}(\vdash P)$$

kontrakcija:
$$\frac{\Gamma A A \vdash_x \Delta}{\Gamma A \vdash_x \Delta}(C\vdash) \qquad \frac{\Gamma \vdash_x A A \Delta}{\Gamma \vdash_x A \Delta}(\vdash C)$$

slabljenje:
$$\frac{\Gamma \vdash_x \Delta}{\Gamma A \vdash_x \Delta}(W\vdash) \qquad \frac{\Gamma \vdash_x \Delta}{\Gamma \vdash_x A \Delta}(\vdash W)$$

за све $x \in L$, *правило сечења:*

$$\frac{\Gamma \vdash_x A\Delta \quad \Pi A \vdash_y \Lambda}{\Gamma\Pi \vdash_{x\cup y} \Delta\Lambda}(\mathrm{cut})$$

за све $x, y \in L$, као и, редом, правила *придруживања* и *монотоности:*

$$\frac{\Gamma \vdash_x \Delta \quad \Gamma \vdash_y \Delta}{\Gamma \vdash_{x\cap y} \Delta}(\mathrm{join}) \qquad \frac{\Gamma \vdash_x \Delta}{\Gamma \vdash_z \Delta}(\mathrm{mon})$$

за све $x, y, z \in L$ такве да је $x \leq z$, тј. $x \cap z = x$, и све $A, B \in \mathrm{For}$ и $\Gamma, \Delta, \Lambda, \Pi \in \mathrm{W(For)}$.

Логичка правила извођења рачуна **LKfuz** су следећа:

$$\frac{\Gamma \vdash_x A\Delta}{\Gamma\neg A \vdash_x \Delta}(\neg\vdash) \qquad \frac{\Gamma A \vdash_x \Delta}{\Gamma \vdash_x \neg A\Delta}(\vdash\neg)$$

$$\frac{\Gamma A B \vdash_x \Delta}{\Gamma A \wedge B \vdash_x \Delta}(\wedge\vdash) \qquad \frac{\Gamma \vdash_x A\Delta \quad \Gamma \vdash_y B\Delta}{\Gamma \vdash_{x\cup y} A \wedge B\Delta}(\vdash\wedge)$$

$$\frac{\Gamma A \vdash_x \Delta \quad \Gamma B \vdash_y \Delta}{\Gamma A \vee B \vdash_{x\cup y} \Delta}(\vee\vdash) \qquad \frac{\Gamma \vdash_x A B\Delta}{\Gamma \vdash_x A \vee B\Delta}(\vdash\vee)$$

$$\frac{\Gamma \vdash_x A\Delta \quad \Gamma B \vdash_y \Delta}{\Gamma A \rightarrow B \vdash_{x\cup y} \Delta}(\rightarrow\vdash) \qquad \frac{\Gamma A \vdash_x B\Delta}{\Gamma \vdash_x A \rightarrow B\Delta}(\vdash\rightarrow)$$

за све $x, y \in L$, све $A, B \in \mathrm{For}$ и све $\Gamma, \Delta, \Lambda, \Pi \in \mathrm{W(For)}$.

Напомена 2.4.1. *Свако правило рачуна* **LKfuz** *са једном премисом која важи* *у контексту x, увек дефинише закључак који важи у истом контексту x, са изузетком правила монотоности чији закључак важи у сваком ширем контексту $y(\geq x)$. Свако правило са две премисе које важе у x и y, дефинише закључак који важи у ширем контексту $x \cup y$, изузев правила придруживања које двема истим премисама које важе у контекстима x и y, дајући закључак који важи у ужем контексту $x \cap y$.*

Докази и извођења из хипотеза у **LKfuz** имају форму дрвета и дефинишу се стандардно, као и у случају система **LKprob** и **LKprob**(ε), где ћемо са **LKfuz**$(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ означавати проширење рачуна **LKfuz** секвентима $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ облика $\Gamma_i \vdash_{x_i} \Delta_i$, за сваки i $(1 \leq i \leq n)$, као новим аксиомама. У том случају ћемо рачун **LKfuz**$(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ посматрати као једну **LKfuz**–теорију.

Најпре доказујемо да је **LKfuz** једно конзервативно проширење рачуна **LK**:

Лема 2.4.2. *Секвент $\Gamma \vdash \Delta$ је доказив у* **LK** *акко $\Gamma \vdash_0 \Delta$ је доказив у* **LKfuz**.

Доказ. Непосредно, индукцијом по дужини доказа секвента $\Gamma \vdash_0 \Delta$ у **LKfuz**, и, обрнуто, индукцијом по дужини доказа секвента $\Gamma \vdash \Delta$ у **LK**. □

Очигледно, секвент $\Gamma\Pi \vdash_{x \cap y} \Delta\Lambda$ се може извести из $\Gamma \vdash_x \Delta$ и $\Pi \vdash_y \Lambda$ у **LKfuz**.

Лема 2.4.3. *Ако је секвент $\Pi \vdash \Lambda$ могуће извести из секвента $\Gamma \vdash \Delta$ у* **LK**, *онда је $\Pi \vdash_x \Lambda$ могуће извести из $\Gamma \vdash_x \Delta$ у* **LKfuz**

Доказ. Директно, индукцијом по дужини извођења секвента $\Pi \vdash_x \Lambda$ из $\Gamma \vdash_x \Delta$ у **LKfuz**. □

Приметимо да правило *mix:*

$$\frac{\Gamma \vdash_x \Delta \quad \Pi \vdash_y \Lambda}{\Gamma(\Pi_A) \vdash_{x \cup y} \Delta_A \Lambda}\ (\mathrm{mix})$$

где Π_A означава реч добијену из речи Π изостављањем свих појављивања формуле A у Π и, слично, Δ_A, очигледно, представља уопштење правила сечења. С друге стране, следеће извођење

$$\frac{\dfrac{\Gamma \vdash_x \Delta}{\Gamma \vdash_x A(\Delta_A)}(\vdash P, \vdash C) \qquad \dfrac{\Pi \vdash_y \Lambda}{\Pi_A A \vdash_y \Lambda}(P \vdash, C \vdash)}{\Gamma(\Pi_A) \vdash_{x \cup y} \Delta_A \Lambda}(\mathrm{cut})$$

показује да се правило *mix* може извести у нашем рачуну **LKfuz**, тј. да су правило *mix* и правило сечења еквивалентна у **LKfuz**, као и у **LK** (в. [108]). Двоструком линијом означавамо скраћено неколико очигледних корака у извођењу заснованих на структурним правилима.

2.4.2 Елиминација правила сечења у рачуну LKfuz

Мада ово није суштински значајно за наш главни резултат у овом делу рада који је везан за теореме сагласности и потпуности, напомињемо да се за рачун **LKfuz** може доказати и теорема о елиминацији сечења, фундаментално тврђење са становишта теорије доказа за један рачун секвената:

Теорема **2.4.4.** ***Теорема о елиминацији сечења. (Cut–elimination Theorem)*** *Ако је секвент* $\Gamma \vdash_x \Delta$ *доказив у* **LKfuz**, *онда је* $\Gamma \vdash_x \Delta$ *доказив у* **LKfuz** *без коришћења правила сечења.*

Доказ. Следимо оригинални Gentzen–ов алгоритам *mix*–елиминације (в. [106] или [108]) заснован на трансфинитној индукцији до ω^2 по ординалу $\omega \cdot |A| + r$, где је $|A|$ степен сложености формуле A (тј. број логичких везника који се појављује у A), а r ранг доказа за $\Gamma(\Pi_A) \vdash_x \Delta_A \Lambda$ дефинисан на следећи начин: $r = r_L + r_R$, где је r_L, леви ранг, (r_R — десни ранг) максималан број узастопних појављивања на путу у извођењу секвента $\Gamma(\Pi_A) \vdash_x \Delta_A \Lambda$ таквих да је $\Gamma \vdash \Delta$ ($\Pi \vdash \Lambda$, респективно) и формула A је садржана у консеквенсу (антецеденсу, респективно) сваког од тих секвената. У случају нашег рачуна **LKfuz**, све Gentzen–ове трансформације које се користе за **LK** могу бити коришћене и овде, уз посебну пажњу посвећену параметрима који се односе на меру x расплинутости посматраног секвента $\Gamma \vdash_x \Delta$. То значи да су нам овде једини нови случајеви са правилима $(\vdash \wedge)$, $(\vee \vdash)$ и $(\rightarrow\vdash)$. У наставку дајемо карактеристичне кораке.

Разматрамо следећа два случаја:

Случај: $r = 2$, тј. $r_L = r_R = 1$. На пример, извођење

$$\cfrac{\cfrac{\Gamma \vdash_x A\Delta \quad \Gamma \vdash_y B\Delta}{\Gamma \vdash_{x\cup y} A \wedge B\Delta}(\vdash \wedge) \qquad \cfrac{\Pi A B \vdash_z \Lambda}{\Pi A \wedge B \vdash_z \Lambda}(\wedge \vdash)}{\Gamma\Pi \vdash_{x\cup y\cup z} \Delta\Lambda}(\mathrm{mix})$$

може бити замењено следећим извођењем:

$$
\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash_y B\Delta \qquad \dfrac{\Gamma \vdash_x A\Delta \quad \Pi AB \vdash_z \Lambda}{\Gamma(\Pi_A)B \vdash_{x\cup z} \Delta_A\Lambda}(\text{mix})}{\Gamma(\Gamma(\Pi_A)_B) \vdash_{x\cup y\cup z} \Delta_B(\Delta_A)\Lambda}(\text{mix})}{\Gamma\Pi \vdash_{x\cup y\cup z} \Delta\Lambda}
$$

Приметимо да су степени сложености $|A|$ и $|B|$ *mix*–формула A и B мањи од $|A \wedge B|$.

Случај $r > 2$ раздвајамо на два подслучаја: када је $r_R > 1$, и када је $r_R = 1$ и $r_L > 1$.

Подслучај: $r_R > 1$. Део извођења d:

$$
\dfrac{\Gamma \vdash_x \Delta \qquad \dfrac{\Pi \vdash_y A\Lambda \quad \Pi B \vdash_z \Lambda}{\Pi A \to B \vdash_{y\cup z} \Lambda}(\to\vdash)}{\Gamma(\Pi_{A\to B}) \vdash_{x\cup y\cup z} \Delta_{A\to B}\Lambda}(\text{mix})
$$

где Δ садржи $A \to B$, може бити замењен извођењем:

$$
\dfrac{\Gamma \vdash_x \Delta \qquad \dfrac{\overset{d_1'}{\Gamma\Pi_{A\to B} \vdash_{x\cup y} \Delta_{A\to B}A\Lambda} \quad \overset{d_2'}{\Gamma\Pi_{A\to B}B \vdash_{x\cup z} \Delta_{A\to B}\Lambda}}{\Gamma\Pi_{A\to B}(A \to B) \vdash_{x\cup y\cup z} \Delta_{A\to B}\Lambda}(\to\vdash)}{\Gamma(\Pi_{A\to B}) \vdash_{x\cup y\cup z} \Delta_{A\to B}\Lambda}(\text{mix})
$$

заснованом на следећим двама извођењима d_1 и d_2:

$$
\begin{array}{c} d_1 \\[4pt] \dfrac{\Gamma \vdash_x \Delta \quad \Pi \vdash_y A\Lambda}{\Gamma\Pi_{A\to B} \vdash_{x\cup y} \Delta_{A\to B}A\Lambda}(\text{mix}) \end{array}
$$

и

$$
\begin{array}{c} d_2 \\[4pt] \dfrac{\Gamma \vdash_x \Delta \quad \Pi B \vdash_z \Lambda}{\Gamma\Pi_{A\to B}B \vdash_{x\cup z} \Delta_{A\to B}\Lambda}(\text{mix}) \end{array}
$$

која, по индуктивној хипотези, могу бити трансформисана у извођења d_1' и d_2' у којима се не појављује правило *mix*, знајући да је $r_R(d_1) = r_R(d_2) = r_R(d) - 1$.

Подслучај када је $r_R = 1$ и $r_L > 1$ је потпуно сличан претходном. $\square$

Могућност елиминације правила сечења даје, као непосредну последицу, својство подформуле за рачун **LKfuz** одакле, даље, имајући у виду да је $\langle L, \cap, \cup, 0, 1\rangle$ коначна мрежа, лако закључујемо да систем **LKfuz** представља једну одлучиву логику.

2.4.3 Непротивречне LKfuz—теорије

У овом делу уводимо појам непротивречне теорије.

Дефиниција 2.4.5. *Нека је σ_i $(1 \leq i \leq n)$ коначна листа секвената облика $\Gamma_i \vdash_{x_i} \Delta_i$, за $x_i \in L$ $(1 \leq i \leq n)$. Тада са* **LKfuz**$(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ *означавамо проширење рачуна* **LKfuz** *секвантима $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$, као додатним аксиомама, и називамо га* **LKfuz**–*теоријом над $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$. Кажемо да је теорија* **LKfuz**$(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ *противречна уколико је сваки секвент $\Gamma \vdash_x \Delta$ доказив у* **LKfuz**$(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$*; иначе, кажемо да је* **LKfuz**$(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ *непротивречна. За секвент $\Gamma \vdash_x \Delta$ кажемо да је непротивречан у односу на теорију* **LKfuz**$(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ *ако је теорија* **LKfuz**$(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ *проширена секвентом $\Gamma \vdash_x \Delta$ непротивречна. Непротивречну теорију називамо максималном непротивречном теоријом уколико је свако њено право проширење противречно.*

Приметимо овде да је празан секвент $\vdash_0$ доказив у свакој противречној **LKfuz**–теорији и, обрнуто, ако је $\vdash_0$ доказив, онда је одговарајућа **LKfuz**–теорија противречна.

Лема 2.4.6. *Сваку непротивречну теорију могуће је проширити до максималне непротивречне теорије.*

Доказ. Нека је $\mathcal{T}$ непротивречна теорија, и нека је $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$ низ свих неозначених секвената, тј. α_n је облика $\Gamma_n \vdash \Delta_n$, и нека је, за сваки $c \in L$, $\alpha_1^c, \alpha_2^c, \ldots, \alpha_n^c, \ldots$ одговарајући низ означених секвената, тј. α_n^c је облика $\Gamma_n \vdash_c \Delta_n$. Нека је $\{c_1, c_2, \ldots, c_{m-1}, c_m\} = L$, где је $c_1 = 0$ и $c_m = 1$, и нека је низ теорија $(\mathcal{T}_n)$ дефинисан индуктивно на следећи начин: $\mathcal{T}_0 = \mathcal{T}$, и $\mathcal{T}_{n+1} = \mathcal{T}_n \cup \{\alpha_n^0\}$, ако је α_n^0 непротивречан у односу на $\mathcal{T}_n$; у супротном, формирамо низ теорија $\mathcal{T}_n^2, \ldots, \mathcal{T}_n^{m-1}$ на следећи начин: ако је $\mathcal{T}_n \cup \{\alpha_n^x | x \geq c_2\}$ непротивречна, онда $\mathcal{T}_n^2 = \mathcal{T}_n \cup \{\alpha_n^x | x \geq c_2\}$; у супротном: $\mathcal{T}_n^2 = \mathcal{T}_n$, и, за сваки i $(2 \leq i \leq m-2)$, ако је $\mathcal{T}_n^i \cup \{\alpha_n^x | x \geq c_{i+1}\}$ непротивречна, онда $\mathcal{T}_n^{i+1} = \mathcal{T}_n^i \cup \{\alpha_n^x | x \geq c_{i+1}\}$; иначе:

$\mathcal{T}_n^{i+1} = \mathcal{T}_n^i$. На крају дефинишемо $\mathcal{T}_{n+1} = \mathcal{T}_n^{m-1}$. Напоменимо да је $\mathcal{T}_n^{i+1} \supseteq \mathcal{T}_n^i$ и да свака теорија $\mathcal{T}_n$ садржи све секвенте облика $\Gamma \vdash_1 \Delta$, захваљујући чињеници да је овај секвент аксиома. Очигледно, крајњи резултат ове конструкције зависи од редоследа тачака $c_2, \dots, c_{m-1}$ скупа L. Нека је

$$\mathcal{T}' = \cup_{n\in\omega}\mathcal{T}_n$$

Тада, индукцијом по n доказујемо да је $\mathcal{T}'$ максимално непротивречно проширење теорије $\mathcal{T}$. Непосредно, следећи дефиницију како смо са $\mathcal{T}_{n+1}$ проширивали теорију $\mathcal{T}_n$, закључујемо да ако је $\mathcal{T}_n$ непротивречна, онда је и $\mathcal{T}_{n+1}$ такође непротивречна. Следствено томе, $\mathcal{T}'$ је непротивречна. Претпоставимо да $\mathcal{T}'$ није максимална. Тада постоји секвент $\Gamma_n \vdash_x \Delta_n$ који прави право проширење теорије $\mathcal{T}'$. У том случају, $\Gamma_n \vdash_x \Delta_n$ не припада теорији $\mathcal{T}_{n+1}$, али ће, с друге стране, проширење теорије $\mathcal{T}_{n+1}$ секвентом $\Gamma_n \vdash_x \Delta_n$ представљати једну противречну теорију, што би значило да је проширење теорије $\mathcal{T}'$ секвентом $\Gamma_n \vdash_x \Delta_n$ такође противречно. Одавде следи да теорија $\mathcal{T}'$ мора бити максимална. □

2.4.4 Модели за расплинуће релације дедукције

У овом делу описујемо моделе за рачун **LKfuz**.

Дефиниција 2.4.7. *Нека је $\langle L, \cap, \cup, 0, 1\rangle$ коначна мрежа са нулом и јединицом. Тада пресликавање $\mu : Seq \to L$ представља модел, уколико задовољава следеће услове:*

(i) $\mu(A \vdash A) = 0$, за све $A \in For$;

(ii) ако $\mu(\vdash A) = x$ и $\mu(\Gamma A \vdash \Delta) = y$, онда $\mu(\Gamma \vdash \Delta) = x \cup y$, са све $\Gamma, \Delta \in W(For)$ и $A \in For$;

(iii) ако се секвент $\Pi \vdash \Lambda$ може извести из $\Gamma \vdash \Delta$ у **LK**, *онда $\mu(\Gamma \vdash \Delta) \leq \mu(\Pi \vdash \Lambda)$, за све $\Gamma \vdash \Delta, \Pi \vdash \Lambda \in Seq$.*

Главна интерпретација чињенице $\mu(\Gamma \vdash \Delta) = x$ је да се **LK**–расплинуће секвента $\Gamma \vdash \Delta$ може изразити као вредност $x \in L$, тј. као 'растојање' (неозначеног) секвента $\Gamma \vdash \Delta$ од скупа свих **LK**–доказивих секвената, које је одређено позицијом елемента x у мрежи $\langle L, \cap, \cup, 0, 1\rangle$. Пресликавање μ представља добру основицу за дефинисање одговарајуће функције припадности (membership function).

Дефиниција 2.4.8. *Задовољење у моделу дефинисано је следећим условом:*

$$\models_\mu \Gamma \vdash_x \Delta \text{ акко } x \geq \mu(\Gamma \vdash \Delta)$$

када кажемо да је означени секвент $\Gamma \vdash_x \Delta$ задовољен у моделу μ. Кажемо де је секвент $\Gamma \vdash_x \Delta$ ваљан акко је он задовољен у сваком моделу, што означавамо са $\models \Gamma \vdash_x \Delta$.

У наставку разматрамо фундаментална својства функције μ.

Лема 2.4.9. *Ако је секвент $\Gamma \vdash \Delta$ доказив у* **LK**, *онда $\mu(\Gamma \vdash \Delta) = 0$.*

Доказ. Директно, индукцијом по дужини доказа секвента $\Gamma \vdash \Delta$ у **LK** и по дефиницији функције μ. □

Леме које следе оправдавају сагласност рачуна **LKfuz** са дефинисаним моделима.

Лема 2.4.10. *За све $A, B \in For$ и све $\Gamma, \Delta, \Pi, \Lambda \in Seq$:*

(a) $\mu(\Gamma A B \Pi \vdash \Delta) = \mu(\Gamma B A \Pi \vdash \Delta)$;

(b) $\mu(\Gamma \vdash \Delta A B \Lambda) = \mu(\Gamma \vdash \Delta B A \Lambda)$;

(c) $\mu(\Gamma A \Pi \vdash \Delta) = \mu(\Gamma A A \Pi \vdash \Delta)$;

(d) $\mu(\Gamma \vdash \Delta A \Lambda) = \mu(\Gamma \vdash \Delta A A \Lambda)$;

(e) $\mu(\Gamma \vdash \Delta) = \mu(\Gamma A \vdash \Delta)$;

(f) $\mu(\Gamma \vdash \Delta) = \mu(\Gamma \vdash A \Delta)$;

(g) $\mu(\Gamma \vdash A \Delta) = \mu(\Gamma \neg A \vdash \Delta)$;

(h) $\mu(\Gamma A \vdash \Delta) = \mu(\Gamma \vdash \neg A \Delta)$;

(i) $\mu(\Gamma A B \vdash \Delta) = \mu(\Gamma A \wedge B \vdash \Delta)$;

(k) $\mu(\Gamma \vdash A B \Delta) = \mu(\Gamma \vdash A \vee B \Delta)$;

(l) $\mu(\Gamma A \vdash B \Delta) = \mu(\Gamma \vdash A \to B \Delta)$.

Доказ. Непосредно користећи део *(iii)* дефиниције модела. □

Лема 2.4.11. *За све $A, B \in For$ и све $\Gamma, \Delta, \Pi, \Lambda \in Seq$, имамо:*

(a) ако $\mu(\Gamma \vdash A \Delta) = x$ и $\mu(\Pi A \vdash \Lambda) = y$, онда $\mu(\Gamma \Pi \vdash \Delta \Lambda) = x \cup y$;

(b) ако $\mu(\Gamma \vdash A\Delta) = x$ *и* $\mu(\Gamma \vdash B\Delta) = y$*, онда* $\mu(\Gamma \vdash A \wedge B\Delta) = x \cup y$*;*

(c) ако $\mu(\Gamma A \vdash \Delta) = x$ *и* $\mu(\Gamma B \vdash \Delta) = y$*, онда* $\mu(\Gamma A \vee B \vdash \Delta) = x \cup y$*;*

(d) ако $\mu(\Gamma \vdash A\Delta) = x$ *и* $\mu(\Gamma B \vdash \Delta) = y$*, онда* $\mu(\Gamma A \rightarrow B \vdash \Delta) = x \cup y$*;*

(e) ако $\models_\mu \Gamma \vdash_x \Delta$ *и* $\models_\mu \Gamma \vdash_y \Delta$*, онда* $\models_\mu \Gamma \vdash_{x \cap y} \Delta$*, за све* $x, y \in L$*;*

(f) ако $\models_\mu \Gamma \vdash_x \Delta$*, онда* $\models_\mu \Gamma \vdash_y \Delta$*, за све* $y \geq x, (x, y \in L)$*.*

Доказ. (a) Слично као у [16], посматрамо следеће **LK**–извођење:

$$\dfrac{\vdash A \rightarrow B \qquad \dfrac{A \vdash A \quad B \vdash C}{A(A \rightarrow B) \vdash C}(*)}{A \vdash C}(**)$$

где је корак означен са $(*)$ омогућен **LK**–правилом за 'увођење импликације у антецеденс' $(\rightarrow\vdash)$ које је следећег облика:

$$\dfrac{A \vdash B \quad C \vdash D}{A(B \rightarrow C) \vdash D}(\rightarrow\vdash)$$

док корак означен са $(**)$ посматрамо као посебан правило *modus ponens*, тј. посебан случај правила сечења:

$$\dfrac{\vdash B \quad AB \vdash C}{A \vdash C}$$

Ово извођење показује како правило хипотетичког силогизма може да се добије као последица правила *modus ponens*. Претпоставимо да је $\mu(A \vdash B) = \mu(\vdash A \rightarrow B) = x$ и $\mu(B \vdash C) = y$. Тада, из $\mu(A \vdash A) = 0$ и $\mu(B \vdash C) = y$, по дефиницији, део *(iii)*, имамо $\mu(A(A \rightarrow B) \vdash C) = y$, одакле, по дефиницији, део *(ii)*, изводимо $\mu(A \vdash C) = x \cup y$. Одакле, непосредно, закључујемо $\mu(\Gamma\Pi \vdash \Delta\Lambda) = x \cup y$, из $\mu(\Gamma \vdash A\Delta) = x$ и $\mu(\Pi A \vdash \Lambda) = y$.

(b) Из $\mu(AB \vdash A \wedge B) = 0$, $\mu(\Gamma \vdash A\Delta) = x$ и $\mu(\Gamma \vdash B\Delta) = y$, директно, према *(a)*, Имамо $\mu(\Gamma \vdash A \wedge B\Delta) = x \cup y$.

За *(c)* и *(d)* користимо следеће две чињенице: $\mu(A \vee B \vdash AB) = 0$ и $\mu(AA \rightarrow B \vdash B) = 0$, редом.

(e) и *(f)* следе непосредно из дефиниције релације задовољења. □

2.4.5 Сагласност и потпуност рачуна LKfuz

У овом делу дефинишемо појам канонског модела и доказујемо теореме сагласности и потпуности за **LKfuz**–теорије.

<u>**Теорема**</u> **2.4.12.** ***(Теорема сагласности.)*** *Ако нека* **LKfuz**–*теорија има модел, онда је она непротивречна.*

Доказ. Индукцијом по дужини доказа за произвољан секвент $\Gamma \vdash_x \Delta$ који је доказив у **LKfuz** доказујемо да је систем **LKfuz** сагласан. Ова чињеница следи непосредно из нашег оправдавања правила извођења кроз тврђења 2.4.9—2.4.11. Дакле, сваки скуп задовољених секвената $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$ је непротивречан у односу на **LKfuz**. □

Стандардни доказ теореме потпуности који следимо укључује дефинисање и коришћење појма канонског модела.

<u>**Дефиниција**</u> **2.4.13.** *Нека је* $Cn(\mathbf{LKfuz}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n))$ *скуп свих секвената који су доказиви у* $\mathbf{LKfuz}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ *и нека је* $ConExt(Cn(\mathbf{LKfuz}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)))$ *класа свих његових максималних непротивречних проширења. Тада дефинишемо* $\mu^X(\Gamma \vdash \Delta) = \cap\{y | \Gamma \vdash_y \Delta \in X\}$ *и, следствено томе,* $\models_{\mu^X} \Gamma \vdash_x \Delta$ *акко* $x \geq \mu^X(\Gamma \vdash \Delta)$*, за сваки* $X \in ConExt(Cn(\mathbf{LKfuz}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)))$.

Очигледно, оваква дефиниција осигурава да пресликавање μ добије адекватне вредности. У том случају имамо:

<u>**Лема**</u> **2.4.14.** $\models_{\mu^X} \Gamma \vdash_x \Delta$ *акко* $\Gamma \vdash_x \Delta \in X$.

Доказ. Из $\models_{\mu^X} \Gamma \vdash_x \Delta$, непосредно, из горње дефиниције, по правилу придруживања, имамо, $\Gamma \vdash_x \Delta \in X$. Обрнуто, ако $\Gamma \vdash_x \Delta \in X$, онда, како је X дедуктивно затворен, по правилу монотоније $\Gamma \vdash_y \Delta \in X$, за све $y \geq x$, па, следствено томе, имамо и $\models_{\mu^X} \Gamma \vdash_x \Delta$. □

Ради краћег записа, надаље ћемо X изостављати из ознаке за пресликавање μ^X.

Такође имамо:

<u>**Лема**</u> **2.4.15.** *Канонски модел је модел.*

Доказ. Нека је μ било које пресликавање дефинисано у складу са горњом дефиницијом на произвољном максималном непротивречном проширењу неке **LKfuz**–теорије. Тада:

(1) Имамо $\mu(A \vdash A) = 0$, јер је $A \vdash_0 A$ аксиома.

(2) Ако $\mu(\vdash A) = x$ и $\mu(\Gamma A \vdash \Delta) = y$, онда, по правилу сечења, изводимо $\mu(\Gamma \vdash \Delta) = x \cup y$, за све $\Gamma, \Delta \in \mathrm{W(For)}$ и $A \in \mathrm{For}$.

(3) Из претходних лема имамо да ако је секвент $\Pi \vdash \Lambda$ могуће извести из $\Gamma \vdash \Delta$ у **LK**, онда $\mu(\Gamma \vdash \Delta) \leq \mu(\Pi \vdash \Lambda)$ у канонском моделу. □

Теорема 2.4.16. ***(Теорема потпуности.)*** *Свака непротивречна* **LKfuz**–*теорија има модел.*

Доказ. Имајући у виду да свака непротивречна теорија може бити проширена до једне максималне непротивречне теорије, те да је таква теорија описана тачно као канонски модел, довољно је доказати да за сваку непротивречну теорију постоји један свет канонског модела у којем је она задовољена. □

Рачун **LKfuz** је уведен с циљем да формализује чињеницу да се 'A може дедуковати из Γ са мером расплинутости x', у ознаци $\Gamma \vdash_x A$. Показали смо да **LKfuz** има, како лепе доказ–теоретске особине, укључујући теорему о елиминацији сечења, тако и значајне модел–теоретске особине, као сагласност и потпуност у односу на дефинисану семантику. Избор (коначне) мреже као основне структуре за изражавање расплинутости омогућио је главни технички прогрес са становишта теорије доказа и могућност елиминације сечења. С друге стране, семантички део садржи једноставне и природне моделе. Систем **LKfuz** омогућава експлицитно дефинисање функције припадности као $\mu(\Gamma \vdash \Delta) = \min\{x | \Gamma \vdash_x \Delta$ је доказив у **LKfuz**$\}$.

Конструкција система **LKfuz** би могла да се прошири и на друге логичке система. На пример, очигледно, ако посматрамо било које исказно проширење **L** Heyting–ове логике исказа (в. [43]) можемо дефинисати његов аналог **Lfuz**, на потпуно исти начин као што је систем **LKfuz** дефинисан на бази класичне логике исказа **LK**. У таквом систему **Lfuz** могла би се доказати теорема о елиминацији сечења, али видимо као прави изазов дефинисање класе модела у односу на коју би рачун **Lfuz** био сагласан и потпун. Основно питање је да ли би модели за **Lfuz** морали да имају било какве везе са моделима за **L**. Не би било изненађење ако би модели за **Lfuz** могли да се дефинишу независно од модела за **L**.

3

Ентропија логичког система

Овај део текста је битно базиран на објављеним чланцима [14] и [25], и саопштењима [15], [20] и [21] самог аутора.

Једна од централних тема апстрактне теорије динамичких система јесте питање њихове класификације. Да би се такав циљ остварио, неопходно је обезбедити један адекватан систем мерења који би омогућио квантификацију и упоређивање особина посматраних динамичких система. Погодне особине за класификацију система јесу оне које су инваријантне, попут ергодичности, периодичности и неодређености. Такође, једна инваријанта система, осетљива на природу система, јесте ентропија. Колико нам је познато, ентропија до сада није коришћена за класификацију логичких система (в. [60], [36]), иако се појмови вероватноће, ентропије и расплинутости често преплићу у литератури из математичке логике (в. [116], [103], [74], [80], [81], [58], [64], [77], [102], [101], [91] и [36]). Ентропију логичке формуле, као количину информације садржане у датој формули, дефинисали су P. Forcheri и др. (в. [39], [40]). Rödder је разматрао условну тровалентну логику Calabrese–а (в. [102] и [27]).

3.1 Ентропија поливалентне логике

Комбинујући две идеје – ентропију детерминистичких система у оквирима теорије мере и везу логичког система са партицијом скупа For свих исказних формула индукуваном одговарајућом Lindenbaum–Tarski–јевом алгебром, ствара се могућност дефинисања ентропије логичког система. Два главна проблема јесу формирање одговарајуће партиције скупа For и дефинисање мере на тим скуповима. Овде представљамо три приступа у дефинисању мере – алгебарски, вероватносни и филозофски, као и класификацију логичких система базирану на ентропији.

Једна природна конструкција партиције скупа For свих исказних формула заснована је на класама еквиваленције које су генерисане одговарајућом Lindenbaum–Tarski–јевом алгебром. Наиме, користимо релацију еквиваленције дефинисану на следећи начин: $A \equiv B$ ако и само ако је $\vdash (A \to B) \wedge (B \to A)$. Тада Lindenbaum–Tarski–јева алгебра, генерисана m–валентном исказном логиком дели скуп свих исказних формула над коначним скупом од n исказних слова For_n, на највише m^{m^n} класа еквиваленције, што значи да је скуп $\mathrm{For_n}/_{\equiv}$ коначан. Свака класа еквиваленције садржи пребројиво много међусобно еквивалентних исказних формула. Наш циљ је да дефинишемо меру неодређености на партицији $\mathrm{For_n}/_{\equiv}$ m–валентне исказне логике, а затим да је продужимо на $\mathrm{For}/_{\equiv}$.

3.1.1 Могуће дефиниције мере

Алгебарски приступ подразумева да су све класе еквиваленције подједнако важне, и самим тим мера сваке од класа $\mathcal{A}_i$ је иста и износи

$$\mu(\mathcal{A}_i) = \frac{1}{m^{m^n}}$$

за сваки $i = 1, 2, \ldots, m^{m^n}$. Напоменимо да у овом пристипу, мера μ није осетљива на степен истинитости формуле.

Познато је да случајна величина са униформном расподелом има максималну ентропију. Нека су $H(\mathbf{L}_m^n)$ и $H(\mathbf{L}_m)$ респективно ентропије партиција скупова $\mathrm{For_n}$ и For. Тада је

$$H(\mathbf{L}_m^n) = m^n \log_2 m$$

и

$$H(\mathbf{L}_m) = \lim_{n\to\infty} H(\mathbf{L}_m^n) = +\infty.$$

С обзиром да ентропија коначновалентне логике тежи ка $+\infty$, овај приступ није погодан за класификацију логичких система. Такође, овако дефинисана ентропија није осетљива ни на број десигнираних вредности k логике $\mathbf{L}_m$.

Вероватносни (или комбинаторни) приступ се своди на разматрање мултиномне расподеле, чији је специјални случај биномна расподела природно повезана са класичном двовалентном логиком. У овом делу разматрамо искључиво случај двовалентне логике, у коме се испоставља да не добијамо коначну ентропију, што значи да ни уопштење на случај m–валентне логике за $m \geq 3$, са мером заснованом на мултиномној расподели, не би дало адекватан резултат.

Вероватноћу формуле A у класичној двовалентној исказној логици, која садржи n исказних слова, можемо дефинисати као количник броја појављивања $\top$ у истинитосној таблици те формуле и 2^n. По овом критеријуму можемо направити партицију $(\mathcal{A}_i)$ $(0 \leq i \leq 2^n)$ скупа $\mathrm{For_n}$. Наиме, свака класа $\mathcal{A}_i$ садржи пребројиво много формула које нису еквидоказиве, осим у случају класа свих таутологија и свих контрадикција. Ако са $p(\mathcal{A}_i)$ означимо вероватносну меру класе $\mathcal{A}_i$, природно је претпоставити да је

$$p(\mathcal{A}_i) = \binom{2^n}{i} \frac{1}{2^{2^n}}$$

за сваки $i = 0, 1, 2, 3, \ldots, 2^n$. У случају биномне расподеле, познато је да важи следећа асимтотска релација

$$H(\mathbf{L}_2^n) \sim \frac{1}{2} \ln \left(e\pi 2^{n-1} \right)$$

кад $n \to \infty$ (в. [104]), што за последицу има:

$$H(\mathbf{L}_2) = \lim_{n\to\infty} H(\mathbf{L}_2^n) = +\infty$$

при чему су $H(\mathbf{L}_2^n)$ и $H(\mathbf{L}_2)$ редом ентропије двовалентне логике $\mathbf{L}_2$ над $\mathrm{For_n}$ и For.

Коначно, приступ који нам омогућава класификацију поливалентних логика базирану на ентропији, је такозвани филозофски приступ који ћемо представити у овом делу. Полазимо од Lindenbaum–Tarski–јеве алгебре која дели скуп свих исказних формула $\mathrm{For_n}$, над коначним скупом од n исказних слова, на m^{m^n}

класа еквиваленције. Свака од класа $\mathcal{A}_i$ садржи пребројиво много међусобно еквивалентних формула и дедуктивно је затворена. Мере класама m–валентне логике са k десигнираних вредности, додељујемо на следећи начин:

$$\mu(\mathcal{A}_i) = \frac{k}{m}\left(1 - \frac{k}{m}\right)^{i-1}$$

за $i = 1, 2, \ldots, m^{m^n} - 1$ и

$$\mu(\mathcal{A}_{m^{m^n}}) = \left(1 - \frac{k}{m}\right)^{m^{m^n}-1},$$

при чему је $\mathcal{A}_1$ класа свих таутологија, која, стога, добија и највећу меру, а са порастом индекса i мера осталих класа геометријски опада.

3.1.2 Примена и примери

Користећи једнакост

$$\sum_{k=1}^{n} kz^k = z\frac{1-(n+1)z^n + nz^{n+1}}{(1-z)^2}$$

која се доказује индукцијом по $M = m^{m^n}$ (в. [59]), имамо:

$$
\begin{aligned}
H(\mathbf{L}_{mk}^n) &= -\sum_{i=1}^{M} \mu(A_i) \log_2 \mu(A_i) \\
&= -\frac{k}{m}\log_2\frac{k}{m} - \frac{k}{m}\left(1-\frac{k}{m}\right)\log_2\left(\frac{k}{m}\left(1-\frac{k}{m}\right)\right) - \cdots - \\
&\quad - \frac{k}{m}\left(1-\frac{k}{m}\right)^{M-2}\log_2\left(\frac{k}{m}\left(1-\frac{k}{m}\right)^{M-2}\right) - \\
&\quad - \left(1-\frac{k}{m}\right)^{M-1}\log_2\left(1-\frac{k}{m}\right)^{M-1} \\
&= -\frac{k}{m}\log_2\frac{k}{m}\left(\sum_{i=0}^{M-2}\left(1-\frac{k}{m}\right)^{i}\right) - \\
&\quad - \frac{k}{m}\log_2\left(1-\frac{k}{m}\right)\left(\sum_{i=1}^{M-2} i\left(1-\frac{k}{m}\right)^{i}\right) - \left(1-\frac{k}{m}\right)^{M-1}\log_2\left(1-\frac{k}{m}\right)^{M-1} \\
&= -\left(1-\left(1-\frac{k}{m}\right)^{M-1}\right)\log_2\frac{k}{m} - \\
&- \left(1-\frac{k}{m}\right)\log_2\left(1-\frac{k}{m}\right)\frac{1-(M-1)\left(1-\frac{k}{m}\right)^{M-2}+(M-2)\left(1-\frac{k}{m}\right)^{M-1}}{\frac{k}{m}} - \\
&\quad - \left(1-\frac{k}{m}\right)^{M-1}\log_2\left(1-\frac{k}{m}\right)^{M-1}
\end{aligned}
$$

и, коначно:

$$
H(\mathbf{L}_{mk}) = \lim_{n\to\infty} H(\mathbf{L}_{mk}^n) = \log_2\left(\frac{m}{k}-1\right) - \frac{m}{k}\log_2\left(1-\frac{k}{m}\right)
$$

Специјално, за $k = 1$, важи:

$$
H(\mathbf{L}_m) = m\log_2 m - (m-1)\log_2(m-1)
$$

и за логику $\mathbf{L}$ која се може добити као

$$
\lim_{m\to\infty}\mathbf{L}_m = \bigcap_{m=2}^{+\infty}\mathbf{L}_m = \mathbf{L}
$$

имамо:

$$
H(\mathbf{L}) \sim \log_2(m-1)
$$

кад $m \to +\infty$.

Напоменимо да је за $k = m - 1$,

$$\lim_{m \to +\infty} H(\mathbf{L}_{m,m-1}) = 0$$

што је интуитивно очекивано, као и да за константну вредност $\frac{k}{m} = \lambda$, имамо константну вредност ентропије:

$$H(\mathbf{L}_{mk}) = \log_2 \left(\frac{1}{\lambda} - 1 \right) - \frac{1}{\lambda} \log_2 (1 - \lambda)$$

Користећи претходну дефиницију ентропије m–велентне логике $\mathbf{L}_{mk}$ са k десигнираних вредности, можемо израчунати:

m	k	$H(\mathbf{L}_{mk})$
2	1	2.0000
3	1	2.7549
3	2	1.3774
4	1	3.2451
4	2	2.0000
4	3	1.0817
5	1	3.6096
5	2	2.4274
5	3	1.6183
5	4	0.9024
6	1	3.9001

(3.1.1)

Из горње табеле закључујемо да класична исказна логика има ентропију мању или једнаку 2, и да обе тровалентне, Lukasiewicz–ева (в. [70], [71], [114] и [97]) и Kleene–јева (в. [62], [63] и [97]) имају ентропије мање или једнаке 2.7549. Тровалентне Priest–ова логика са две десигниране вредности, такозвана "логика парадокса" (в. [95] и [96]) имају ентропије мањи или једнаку 1.3774, док Belnap–ова (в. [8]) четворовалентна са једном десигнираном вредношћу има ентропију највише 3.2451.

Низ $\mathbf{H} + \mathbf{E}_m$ коначновалентних проширења Heyting–ове исказне логике $\mathbf{H}$

схема–аксиомама $\mathbf{E}_m$:

$$\bigvee_{1\leq i<j\leq m}(A_i \leftrightarrow A_j)$$

за $m \geq 3$, где $A \leftrightarrow B$ представља $(A \to B) \wedge (B \to A)$, који је увео McKay (в. [76]), представља строго опадајући низ $\mathbf{H}+\mathbf{E}_m$ $(m-1)$–валентних логика са једном десигнираном вредношћу између $\mathbf{H}$ и класичне двовалентне логике $\mathbf{L}_2$, тј.

$$\mathbf{H} \subset ... \subset \mathbf{H}+\mathbf{E}_{m+1} \subset \mathbf{H}+\mathbf{E}_m \subset ... \subset \mathbf{H}+\mathbf{E}_4 \subset \mathbf{H}+\mathbf{E}_3 = \mathbf{L}_2.$$

Како је

$$\lim_{m\to+\infty}(\mathbf{H}+\mathbf{E}_m) = \bigcap_{m\geq 3}(\mathbf{H}+\mathbf{E}_m) = \mathbf{H}$$

(в. [76]) закључујемо да за ентропију Heyting–ове исказне логике важи

$$H(\mathbf{H}) \sim \log_2(m-2)$$

кад $m \to +\infty$, док за ентропију логике $\mathbf{H}+\mathbf{E}_{m+1}$ имамо:

$$H(\mathbf{H}+\mathbf{E}_{m+1}) \leq m\log_2 m - (m-1)\log_2(m-1).$$

Истакнимо овде да је моделе проширења Heyting–ове логике сличним схема–аксиомама разматрао и М. Божић (в. [26]).

Са друге стране, Gödel–ове екстензије $\mathbf{S}_m$ (в. [50]) Dummett–ове логике $\mathbf{LC} = \mathbf{H} + (A \to B) \vee (B \to A)$ (в. [35] и [6]), дефинисане као $\mathbf{S}_m = \mathbf{LC} + A_m$, где је такозвани Nagata–ин низ формула (A_m) (в. [82]) индуктивно дефинисан са:

$$A_1 = ((P_2 \to P_1) \to P_2) \to P_2$$

$$A_{m+1} = ((P_{m+2} \to A_m) \to P_{m+2}) \to P_{m+2}$$

при чему су $P_1, P_2, ...$ исказна слова, представља строго опадајући низ исказних интермедијалних логика између Dummett–ове логике $\mathbf{LC}$ и класичне двовалентне логике $\mathbf{L}_2$, тј.

$$\mathbf{H} \subset \mathbf{LC} \subset ... \subset \mathbf{S}_{m+1} \subset \mathbf{S}_m \subset ... \subset \mathbf{S}_2 \subset \mathbf{S}_1 = \mathbf{L}_2$$

(в. [110], [55] и [56]). $\mathbf{S}_m$ је $(m+1)$–валентна логика коју карактерише $(m+1)$–

елементни линеарно уређен систем са једном десигнираном вредношћу, и важи

$$\lim_{m \to +\infty} \mathbf{S}_m = \bigcap_{m=1}^{+\infty} \mathbf{S}_m = \mathbf{LC}$$

што значи да се ентропија асимптотски понаша као

$$H(\mathbf{LC}) \sim \log_2 m$$

кад $m \to +\infty$. У овом случају, важи и:

$$H(\mathbf{S}_{m-1}) \leq m \log_2 m - (m-1) \log_2 (m-1)$$

Приметимо да бесконачновалентне Heyting –ова и Dummett–ова логике имају бесконачне ентропије које се асимптотски исто понашају.

4

Закључак

Мада системи секвената **LKprob**, **LKprob**(ε) и **LKfuz**, сваки за себе, представљају засебне целине, могуће их је, све заједно, посматрати као једну континуирану логичку анализу означених секвената исказне класичне логике **LK**. Истраживање полази од идеје пробабилизације Gentzen–овог рачуна **LK** (в. [47]) засноване на принципима филозофски фундираним у радовима Carnap–а (в. [28]) и Popper–а (в. [93]) и досеже најпре до могућности дефинисања интервалне вероватноће истинитости секвента $\Gamma \vdash \Delta$, за интервале облика $[a, b] \subseteq [0, 1]$, кроз рачун **LKprob** са секвентима облика $\Gamma \vdash_a^b \Delta$. Основно оправдање система **LKprob** представљају теореме сагласности и потпуности у односу на природно уведену семантику.

Специјалан случај рачуна **LKprob** је рачун **LKprob**(ε) који се бави високим вероватноћама секвента $\Gamma \vdash \Delta$ везаним за интервале облика $[1 - n\varepsilon, 1]$ и секвенте $\Gamma \vdash^n \Delta$, што је инспирисано почетним идејама Suppes–а (в. [105]). Систем **LKprob**(ε) поседује далеко елегантније форме правила извођења (в. [18]) у односу на исте у систему **LKprob**, које су такође праћене одговарајућим резултатима сагласности и потпуности. Рачун **LKprob**(ε) представља, у извесном смислу, доказ–теоретско побољшање рачуна **LKprob**. У оба ова рачуна, верујемо, изостаје, на пример, могућност елиминације правила сечења (cut–elimination theorem) због експлицитног присуства правила адитивности у систему.

Коначно, систем **LKfuz** представља уопштење претходна два у којем интервал као ознаку секвента $\Gamma \vdash_a^b \Delta$ замењујемо елементима x коначне мреже како бисмо, изостављајући правило адитивности из нашег система, и одричући се основне вероватносне интерпретације секвента $\Gamma \vdash_x \Delta$, а прихватајући интерпретацију везану за меру расплинутости, добили јаснију могућност обезбеђивања одређених доказ–теоретских својстава нашег рачуна, попут елиминације правила сечења. Другим речима, за 'путовање' од **LK**, преко **LKprob** и **LKprob**(ε), до **LKfuz** можемо наћи утемељено оправдање, поред семантичких (модел–теоретских) резултата сагласности и потпуности, такође и у резултатима синтаксног (доказ–теоретског) типа.

Међу могућим правцима даљих истраживања и унапређења добијених резултата свакако најизазовнији јесте трансформација вероватносних рачуна секвената **LKprob** и **LKprob**(ε) у одговарајуће интуиционистичке верзије **LJprob** и **LJprob**(ε), где се, као највећи проблем испречио третман адитивности. Наиме, адитивност би без додатних ограничења интуиционистичку логику претварала у класичну. Разрешење овог проблема би отворило пут ка дефинисању интуиционистичке верзије **NJprob** рачуна природних извођења **NKprob**, те дефинисање одговарајућих модела. Питање је такође да ли би модели рачуна **LJprob** и **NJprob** морали да буду базирани на моделима са могућим световима типа Kripke–a (в. [108] и [29]) или би могли бити дефинисани једноставније, као што смо то урадили у случајевима рачуна **LKprob**, **LKprob**(ε), **LKfuz** и **NKprob**.

Питање које отвара горе наведени приступ ентропији логичког система јесте могућност примене истог приступа на класификацију коначних алгебри, па и коначних релационих структура. Верујемо да би на сличан могло да се дође до класификације у теорији алгебарских система.

Литература

[1] A. Avron, "Multi–valued semantics: why and how", *Studia Logica* 92 (2009), pp. 163–182.

[2] E. Adams, "The logic of conditionals", *Inquiry* 8 (1965), pp. 166–197.

[3] E. Adams, *The Logic of Conditionals*, Reidel, Dordrecht, 1975.

[4] E. Agazzi ed., *Modern Logic — A Survey*, Synthese Library, Volume 149, D. Reidel Publ. Comp., Dordrecht, 1981.

[5] A. R. Anderson, N. D. Belnap, *The Logic of Relevance and Necessity*, Vol. I, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1975.

[6] M. Baaz, N. Preining, "Gödel–Dummett logics", in [31] 2011, pp. 585–625.

[7] J. L. Bell, M. Machover, *A Course in Mathematical Logic*, North–Holland, Amsterdam, 1977.

[8] N. D. Belnap, "A useful four–valued logic", *Modern Uses of Multiple–Valued Logic* J–M. Dunn, G. Epstein (eds.), D. Reidel, Dordrecht, 1977, pp. 5–37.

[9] G. Birkhoff, *Lattice Theory*, American Mathematical Society, Providence, 1940.

[10] W. J. Blok, J. Rebagliato, "Algebraic semantics for deductive systems", *Studia Logica* 74 (2003) pp. 153–180.

[11] I. M. Bocheński, *A History of Formal Logic*, Chelsea Publ. Comp, New York, 1970. (First edition 1961.)

[12] D. Bonevac, *Deduction*, Blackwell Publishing, Malden, 2003.

[13] G. Boole, *The Laws of Thought*, Prometheus Books, New York, 2003. (First edition 1854.)

[14] M. Boričić, "On entropy of a logical system", *Journal of Multiple-Valued Logic and Soft Computing* 21, Number 5-6, 2013, pp. 439–452.

[15] M. Boričić, "On entropy of a propositional logic", *Bulletin of Symbolic Logic* 20, No. 2, 2014, p. 225, Logic Colloquium 2013, European Summer Meeting, Evora, Portugal, 22nd-27th July 2013.

[16] M. Boričić, "Hypothetical syllogism rule probabilized", *Bulletin of Symbolic Logic* 20, No. 3, 2014, pp. 401–402, Abstract, Logic Colloquium 2012, University of Manchester, 12th-18th July 2012.

[17] M. Boričić, "Models for the probabilistic sequent calculus", *Bulletin of Symbolic Logic* 21, No. 1, 2015, p. 60, Abstract, Logic Colloquium 2014, European Summer Meeting of Association for Symbolic Logic, Vienna University of Technology 14th-19th July.

[18] M. Boričić, "Suppes–style sequent calculus for probability logic", *Journal of Logic and Computation* (to appear) doi:10.1093/logcom/exv068.

[19] M. Boričić, M. Jovović, "Verovatnosne verzije osnovnih pravila izvođenja", *SYM-OP-IS 2011, XXXVIII* Simpozijum o operacionim istraživanjima, Zbornik radova, pp. 739-741.

[20] M. Boričić, "Evolucija koncepta entropije — od termodinamike do algebre", *SYM-OP-IS 2012, XXXIX* Simpozijum o operacionim istraživanjima, Zbornik radova, pp. 619–622.

[21] M. Boričić, "O jednoj primeni entropije u teoriji logičkih sistema", *SYM-OP-IS 2013, XL* Simpozijum o operacionim istraživanjima, Zbornik radova, pp. 868–870.

[22] M. Boričić, "Carnap–Popper–Leblanc–ov tip semantike za verovatnosno zaključivanje", *SYM-OP-IS 2014, XLI* Simpozijum o operacionim istraživanjima, Zbornik radova, pp. 644–647.

[23] M. Boričić, "Saglasnost i potpunost verovatnosnih pravila zaključivanja", *SYM-OP-IS 2015, XLII* Simpozijum o operacionim istraživanjima, Zbornik radova, pp. 586–588.

[24] M. Boričić, "Inference rules for probability logic", *Publications de l'Institut Mathématique* (to appear)

[25] M. Boričić, "A note on entropy of logic", *Yugoslav Journal of Operations Research* (to appear)

[26] M. Božić, "Semantics for some intermediate logics", *Publications de l'Institut Mathématique*, 37 (51) (1985), pp. 7–15.

[27] P. G. Calabrese, "Deduction and inference using conditional logic and probability", *Conditional Logic in Expert Systems* I.R. Goodman, M.M. Gupta, H.T. Nguyen, G.S. Rogers (eds.), Elsevier Science, Amsterdam, 1991, pp. 71-100.

[28] R. Carnap, *Logical Foundations of Probability*, University of Chicago Press, Chicago, 1950.

[29] B. F. Chellas, *Modal Logic*, Cambridge University Press, Cambridge, 1980.

[30] P. Cintula, P. Hájek, C. Noguera (eds.), *Handbook of Mathematical Fuzzy Logic*, Volume 1, Studies in Logic 37, College Publications, London, 2011.

[31] P. Cintula, P. Hájek, C. Noguera (eds.), *Handbook of Mathematical Fuzzy Logic*, Volume 2, Studies in Logic 38, College Publications, London, 2011.

[32] R. Djordjević, M. Rašković, Z. Ognjanović, "Completeness theorem for propositional probabilistic models whose measures have only finite ranges", *Archive for Mathematical Logic* 43(4) (2004), pp. 557–563.

[33] D. Doder, B. Marinkovic, P. Maksimovic, A. Perovic, "A logic with conditional probability operators", *Publications de l'Institut Mathématique* 87(101), 2010, pp. 85–96.

[34] K. Došen, "Deductive completeness", *The Bulletin of Symbolic Logic* 2 (1996) pp. 243–283.

[35] M. Dummett, "A propositional calculus with denumerable matrix", *Journal of Symbolic Logic* 24 (1959) pp. 96–107.

[36] D. Ellerman, "Counting distinctions: on the conceptual foundations of Shannon's information theory", *Synthese* 168 (2009) pp. 119–149.

[37] R. Fagin, J. Y. Halpern, N. Megiddo, "A logic for reasoning about probabilities", *Information and Computation* 87 (1990), pp. 78–128.

[38] J. E. Fenstad, "Logic and probability", in [4], 1981, pp. 223–233.

[39] P. Forcheri, P. Gentilini, M. T. Molfino, "Informational logic for automated reasoning", *Logics in Artificial Intelligence, Lecture Notes in Computer Science* 1126 (1996) pp. 354–372.

[40] P. Forcheri, P. Gentilini, M. T. Molfino, "Informational logic as a tool for automated reasoning", *Journal of Automated Reasoning* 20 (1998) pp. 167–190.

[41] M. Fréchet, "Généralisations du théoréme des probabilités totales", *Fundamenta Mathematicae*, 25 (1935), pp. 379–387.

[42] A. M. Frisch, P. Haddawy, "Anytime deduction for probabilistic logic", *Artificial Intelligence*, 69 (1993), pp. 93–122.

[43] D. M. Gabbay, *Semantical Investigations in Heyting's Intuitionistic Logic*, D. Reidel Publ. Comp., Dordrecht, 1981.

[44] D. M. Gabbay, *Labelled Deductive Systems*, Oxford University Press, Oxford, 1996.

[45] D. M. Gabbay, *Meta–logical Investigations in Argumentation Networks*, Studies in Logic 44, College Publications, London, 2013.

[46] D. M. Gabbay, R. H. Johnson, H. J. Ohlbach, J. Woods (eds.), *Handbook of the Logic of Argument and Inference*, Studies in Logic and Practical Reasoning, Vol. 1, North–Holland, Amsterdam, 2002.

[47] G. Gentzen, "Untersuchungen über das logische Schliessen", *Mathematische Zeitschrift* 39 (1934–35), pp. 176–210, 405–431 (or G. Gentzen, *Collected Papers*, (ed. M. E. Szabo), North–Holland, Amsterdam, 1969).

[48] G. Gerla, R. Tortora, "Fuzzy natural deduction", *Zeitschr. f. math. Logik und Grundlagen d. Math.*, 36 (1990), pp. 67–77.

[49] G. Gerla, "Comparing fuzzy and crisp deduction systems", *Fuzzy Sets and Systems*, 67 (1994), pp. 317–328.

[50] K. Gödel, "Zum intuitionistischen Aussagenkalkül", *Anzeiger der Akademie der Wissenschaften in Wien* 69 (1932) pp. 65–66; reprinted, with additional comment in Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums 4, p. 40, and in *Kurt Gödel, Collected Works*, Vol. I, ed. S. Feferman et al, Oxford University Press, New York, 1986, pp. 222–225.

[51] T. Hailperin, "Best possible inequalities for the probability logical function of events", *American Mathematical Monthly*, 72 (1965), pp. 343–359.

[52] T. Hailperin, "Probability logic", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 25 (1984), pp. 198–212.

[53] T. Hailperin, *Boole's Logic and Probability*, North–Holland, Amsterdam, 1976. (Second edition 1986.)

[54] A. Horn, "On sentences which are true of direct unions of algebras", *The Journal of Symbolic Logic* 16 (1951), pp. 14–21.

[55] T. Hosoi, "On the axiomatic method and the algebraic method for dealing with propositional logics", *Journal of the Faculty of Science, University of Tokyo, section I* 14 (1967) pp. 131–169.

[56] T. Hosoi, "On intermediate logics", *Journal of the Faculty of Science, University of Tokyo, section I* 14 (1967) pp. 293–312, and vol. 16 (1969) pp. 1–12. (Review by C. G. McKay, *J. Symbolic Logic*, 36 (1971), p. 329.).

[57] N. Ikodinović, "Craig interpolation theorem for classical propositional logic with some probability operators", *Publications de l'Institut Mathématique*, 69 (83) (2001), pp. 27–33.

[58] S. Ishikawa, "Fuzzy logic in measurements", *Fuzzy Sets and Systems* 100 (1998) pp. 291–300.

[59] A. Jonquiére, ”Note sur la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^s}$”, *Bulletin de la Société Mathématique de France* 17 (1889) pp. 142–152.

[60] J. N. Kapur, *Measures of information and their applications*, Wiley Eastern, New Delhi, 1994.

[61] J. M. Keynes, *A Treatise on Probability*, Cambridge University Press, Cambridge, 2013. (First edition 1921)

[62] S. C. Kleene, ”On notation for ordinal numbers”, *Journal of Symbolic Logic* 3 (1938) pp. 150–155.

[63] S. C. Kleene, *Introduction to Metamathematics*, North–Holland, Amsterdam, 1952.

[64] G. J. Klir, ”Principles of uncertainty: What are they? Why do we need them?”, *Fuzzy Sets and Systems* 74 (1995) pp. 15–31.

[65] H. Leblanc, B. C. van Fraassen, ”On Carnap and Popper probability functions”, *The Journal of Symbolic Logic*, 44 (1979), pp. 369–373.

[66] H. Leblanc, ”Popper's 1955 axiomatization of absolute probability”, *Pacific Philosophical Quarterly*, 69 (1982), pp. 133–145.

[67] H. Leblanc, ”Probability functions and their assumption sets — the singulary case”, *Journal of Philosophical Logic*, 12 (1983), pp. 382–402.

[68] D. Lewis, ”Probabilities of conditionals and conditional probabilities”, *The Philosophical Review* 85 (1976), pp. 297–315.

[69] D. Lewis, ”Probabilities of conditionals and conditional probabilities II”, *The Philosophical Review* 95 (1986), pp. 581–589.

[70] J. Lukasiewicz, ”O logice trójwartosćiowej”, *Ruch filozoficzny* 5 (1920) pp. 170–171. (English translation: ”On three–valued logic”, in J. Lukasiewicz, *Selected Works*, ed. L. Borkowski, North–Holland, Amsterdam, 1970, pp. 87–88.).

[71] J. Lukasiewicz, A. Tarski, ”Untersuchungen über den Aussagenkalkül”, *Comptes Rendus des Séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie,*

Classe III 23 (1930) pp. 30–50. (Translated in A. Tarski, *Logic, Semantics, Metamathematics, Papers from 1923–1938*, Clarendon Press, Oxford, 1956, pp. 38–59. Reprinted in J. Lukasiewicz, *Selected Works*, ed. L. Borkowski, North–Holland, Amsterdam, 1970, pp. 131–152, and in A. Tarski, *Collected Papers*, Vol. 1, eds. S. R. Givant and R. N. McKenzie, Birkhäuser, Bazel, 1986, pp. 321–343.).

[72] Z. Marković, Z. Ognjanović, M. Rašković, "An intuitionistic logic with probabilistic operators", *Publications de l'Institut Mathématique*, 73 (87) (2003), pp. 31–38.

[73] Z. Marković, Z. Ognjanović, M. Rašković, "A probabilistic extension of intuitionistic", *Mathematical Logic Quarterly*, 49 (2003), pp. 415–424.

[74] I. Maung, "A note on measures of fuzziness applied to nonmonotonic fuzzy propositional logic", *Fuzzy Sets and Systems* 67 (1994) pp. 199–209.

[75] S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer, Berlin, 1971.

[76] C. G. McKay, "On finite logics", *Indagationes Mathematicae* 70 (1967) pp. 363–365. (Review by T. Umezawa, *J. Symbolic Logic*, 36 (1971), p. 330.).

[77] R. Mesiar, J. Ribárik, "Entropy of fuzzy partitions: A general model", *Fuzzy Sets and Systems* 99 (1998) pp. 73–79.

[78] G. Metcalfe, "Proof theory for mathematical fuzzy logic", in [30] 2011, pp. 209–282.

[79] A. C. Michalos, *The Popper–Carnap controversy*, Martinus Nijhoff, The Hague, 1971.

[80] D. Mundici, "Averaging the truth–value in Lukasiewicz logic", *Studia Logica* 55 (1995) pp. 113–127.

[81] D. Mundici, *Advanced Lukasiewicz calculus and MV–algebras*, Trends in Logic, Volume 35, Springer, Berlin, 2011.

[82] S. Nagata, "A series of successive modifications of Peirce's rule", *Proc. Jap. Acad.* 42 (1966) pp. 859–861.

[83] H. T. Nguyen, E. A. Walker, *A first course in fuzzy logic*, Chapman&Hall, London, 2000.

[84] N. J. Nilsson, "Probabilistic logic", *Artificial Intelligence* 28 (1986), pp. 71–87.

[85] N. J. Nilsson, "Probabilistic logic revisited", *Artificial Intelligence* 59 (1993), pp. 39–42.

[86] I. Nishimura, "On formulas of one variable in intuitionistic propositional calculus", *Journal of Symbolic Logic* 25 (1960) pp. 327–331.

[87] Z. Ognjanović, M. Rašković, "A logic with higher order probabilities", *Publications de l'Institut Mathématique*, 60 (74) (1996), pp. 1–4.

[88] Z. Ognjanović ed., *Logic in Computer Science, Zbornik radova*, 12 (20), Mathematical Institute SANU, Belgrade, 2009.

[89] Z. Ognjanović, M. Rašković, Z. Marković, "Probability logics", in [88], 2009, pp. 35–111.

[90] Z. Ognjanović, A. Perović, M. Rašković, "Logics with the qualitative probability operator", *Logic Journal of the IGPL* 16(2), (2008), pp. 105–120.

[91] M. A. Paskin, "Maximum entropy probabilistic logic", *EECS Technical Report, Computer Science Division* CSD-01-1161 (2002).

[92] J. Pavelka, "On fuzzy logic I: Many–valued rules of inference", *Zeitschr. f. math. Logik und Grundlagen d. Math.*, 25 (1979), pp. 45–52.

[93] K. R. Popper, "Two autonomous axiom systems for the calculus of probabilities", *The British Journal for the Philosophy of Science*, 6 (1955), pp. 51–57, 176, 351.

[94] D. Prawitz, *Natural Deduction. A Proof–theoretical Study*, Almquist and Wiksell, Stockholm, 1965.

[95] G. Priest, "The logic of paradox", *Journal of Philosophical Logic* 8 (1979) pp. 219–241.

[96] G. Priest, "The logic of paradox revisited", *Journal of Philosophical Logic* 13 (1984) pp. 153–179.

[97] G. Priest, *An Introduction to Non–Classical Logic*, Cambridge University Press, New York, 2001. (Second edition 2008.).

[98] J. G. Raftery, "Correspondence between Gentzen and Hilbert systems", *The Journal of Symbolic Logic*, 71 (2006), pp. 903–957.

[99] M. Rašković, "Classical logic with some probability operators", *Publications de l'Institut Mathématique*, 53 (67) (1993), pp. 1–3.

[100] M. Rašković, R. Djordjević, *Probability Quantifiers and Operators*, Vesta, Belgrade, 1996.

[101] B. Riečan, D. Mundici, "Probability on MV–algebras", *Handbook of Measure Theory* Vol. I, II (E. Pap, ed.) North–Holland, Amsterdam, 2002, pp. 869–909.

[102] W. Rödder, "Conditional logic and the principle of entropy", *Artificial Intelligence* 117 (2000) pp. 83–106.

[103] W. Sander, "On measures of fuzziness", *Fuzzy Sets and Systems* 29 (1989) pp. 49–55.

[104] L. Shepp, I. Olkin, "Entropy of the sum of independent Bernoulli random variables and of the multinomial distribution", *Contributions to Probability* J. Gani V. K. Rohatgi (eds.), Academic Press, New York, 1981, pp. 201–206.

[105] P. Suppes, "Probabilistic inference and the concept of total evidence", in J. Hintikka and P. Suppes (eds.), *Aspects of Inductive Inference*, North–Holland, Amsterdam, 1966, pp. 49–55.

[106] M. E. Szabo, *Algebra of Proofs*, North–Holland, Amsterdam, 1978.

[107] R. Suszko, "The Fregean axiom and Polish mathematical logicin 1920's", *Studia Logica* 36 (1977) pp. 373–380.

[108] G. Takeuti, *Proof Theory*, North–Holland, Amsterdam, 1975.

[109] A. Tarski, "On the concept of following logically", *History and Philosopy of Logic* 23 (2002) pp. 155–196. (Rad prvi put objavljen na poljskom jeziku u *Przeglad Filozoficzny* 39 (1936) pp. 58–68.)

[110] I. Thomas, "Finite limitations on Dummett's LC", *Notre Dame Journal of Formal Logic* 3 (1962) pp. 170–174.

[111] J. Venn, *The Logic of Chance*, Chelsea Publishing Company, New York, 1962. (First edition 1866.)

[112] J. Venn, *The Principles of Inductive Logic*, Chelsea Publishing Company, New York, 1973. (First edition 1889.)

[113] L. Vigano, *Labelled Non–Classical Logics*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.

[114] M. Wajsberg, "Aksjomatyzacja trójwartściowego rachunku zdań", *Comptes Rendus des Séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, Cl. III* 23 (1931) pp. 126–145. (English translation: "Axiomatization of the Three–Valued Propositional Calculus", pp. 13–29, in S.J. Surma (ed.), *Mordechaj Wajsberg. Logical Works*, Polish Academy of Sciences, Ossolineum, Wroclaw 1977.).

[115] C. G. Wagner, "Modus tollens probabilized", *British Journal for the Philosophy of Science*, 54(4) (2004), pp. 747–753.

[116] P. M. Williams, "Bayesian conditionalisation and the principle of minimum information", *British Journal of the Philosophy of Science* 31 (1980) pp. 131–144.

[117] J. Williamson, "Probability logic", in [46] (2002) pp. 397–424.

[118] R. Wójcicki, "Some remarks on the consequence operation in sentential logic", *Fundamenta Mathematicae* 68 (1970) pp. 269–279.

[119] R. Wójcicki, *Lectures on Propositional Calculi*, Polish Academy of Sciences, Ossolineum, Lódź, 1984.

[120] L. A. Zadeh, "Fuzzy sets", *Information and Control* 8 (3) (1965), pp. 338–353.

[121] L. A. Zadeh, "Fuzzy logic and approximate reasoning", *Synthese* 30 (1975), pp. 407–428.

Биографија аутора

Марија Боричић је рођена 29. октобра 1987. године у Београду. Основно образовање стекла у Беогарду, Ираклиону и Серезу (Грчка). Завршила Математичку гимназију у Беогарду 2006. године. Дипломирала на Математичком факултету, Универзитета у Београду, 2010. године на студијском програму Статистика, актуарска и финансијска математика са просечном оценом 9,63. Мастер студије завршила на Математичком факултету, Универзитета у Београду, 2011. године, студијски програм Математика, модул Теоријска математика и примене, одбранивши рад под насловом ”Ергодичност и ентропија динамичких система”. Од 2011/12. студент је докторских студија на Математичком факултету, Универзитета у Београду, студијски програм Математика, при Катедри за алгебру и математичку логику, на којем је положила све испите.

Радно искуство: Сарадник у настави (од 2011.) и асистент (од 2013.) на Факултету организационих наука, Универзитета у Београду, где изводи наставу из следећих предмета: Математика 1, Математика 2 и Нумеричка анализа.

Учешће на пројектима: Од 2012. године учествује на пројекту Министарства просвете, науке и технолошког развоја, под називом: Репрезентације логичких структура и формалних језика и њихове примене у рачунарству (ON174026).

Области научног интересовања: Математичка логика (Вероватносне логике и апроксимативно закључивање, теорија логичких система, поливалентне логике. (AMS 2010 Mathematics Subject Classification: 03B50, 03B05, 94A17, 37A35.)