

Наставно-научном већу
Математичког факултета
Универзитета у Београду

На 343. седници Наставно-научног већа Математичког факултета Универзитета у Београду, одржаној 30. јуна 2017. године, одређени смо за чланове комисије за преглед и оцену рукописа „Средње вредности мултипликативних аритметичких функција више променљивих зависних од НЗД и НЗС аргумената” који је предат као докторска дисертација кандидаткиње Кхоле Алгали Ајлиди. Након прегледа рукописа подносимо Наставно-научном већу следећи

Извештај о докторској дисертацији „Средње вредности мултипликативних аритметичких функција више променљивих зависних од НЗД и НЗС аргумената”

1. Биографија кандидата

Кхола Алгали Омер Ајлиди је рођена 17.8.1985. године у Триполију, Либија. Дипломирала је 2007. године на Департману за математику Ал-Фатах универзитета у Триполију. Мастер студије је завршила на Математичком факултету у Београду, студијски програм Математика, 2012. године. Докторске студије је уписала на истом факултету, 2014. године.

До сада има објављене следеће научне радове који се уједно односе и на садржај дисертације:

1. Khola Algali, *On some multivariate LCM and GCD sums*, Turkish Journal of Mathematics **42** (2018), 1298 - 1306. doi:10.3906/mat-1706-68
SCI M23, IF (2017): 0.614
2. Khola Algali, *On some multivariate summatory functions of the Euler phi-function*, Matematički vesnik, **70(4)** (2018) 344–349. M52 (2018)

2. Предмет докторске дисертације

Предмет докторске дисертације су мултипликативне аритметичке функције више променљивих, тј. функције $f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{C}$ које задовољавају

$$f(m_1 n_1, m_2 n_2, \dots, m_k n_k) = f(m_1, m_2, \dots, m_k) f(n_1, n_2, \dots, n_k)$$

за све парове k -торки природних бројева таквих да је $\text{НЗД}(m_1 m_2 \dots m_k, n_1 n_2 \dots n_k) = 1$. Основни задатак теорије мултипликативних функција је проучавање њихових средњих вредности тј. суматорних функција и добијање било асимптотске горње оцене или тачне асимптотске формуле (са тачним главним чланом и оценом за грешку), ако је то могуће.

Типичне мултипликативне функције више променљивих су на пример дате преко најмањег заједничког садржаоца и највећег заједничког делиоца k -торке аргумената. Р. Diaconis и Р. Erdős су 1977. добили следеће асимптотске формуле за двоструке сумације

$$\sum_{m,n \leq x} (m, n) = \frac{x^2}{\zeta(2)} \left(\log x + 2\gamma - \frac{1}{2} - \frac{\zeta(2)}{2} - \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} \right) + O(x^{3/2} \log x)$$

и

$$\sum_{m,n \leq x} [m, n]^a = \frac{\zeta(a+2)}{(a+1)^2 \zeta(2)} x^{2a+2} + O(x^{2a+1} \log x)$$

за a било који позитиван реалан број (γ је Ојлерова константа и $\zeta(s)$ је Риманова зета-функција). Са (m, n) је означен НЗД, а са $[m, n]$ НЗС природних бројева m, n .

Предмет ове дисертације је извођење уопштења ових формула у неколико праваца – повећање броја променљивих, повећање комплексности НЗС-НЗД конфигурације и доказивање резултата за ширу класу аритметичких функција, која садржи нпр. Ојлерову φ -функцију.

3. Садржај дисертације

Дисертација садржи $vi + 61$ страну, садржај, табелу нотације, списак литературе од 32 референце и главни део који је подељен у 4 главе.

Прве две главе су припремног и прегледног карактера. У првој глави се уводе основни појмови теорије аритметичких функција, као и фундаментални концепт Дирихлеове конволуције аритметичких функција.

У другој глави се даје преглед основних техника за налажење средњих вредности аритметичких функција. Између осталог уводи се и фундаментални појам Дирихлеовог генераторног реда придруженог аритметичкој функцији. Такође, даје се преглед основних дефиниција теорије мултипликативних аритметичких функција више променљивих.

У трећој глави се излажу ауторкини резултати објављени у раду [1]. Као један од главних резултата добијена је за све целе бројеве $k \geq 2$, $\ell \geq 1$, $a \geq c \geq 1$ и $b \geq d \geq 0$ асимптотска формула за следећу општу суму

$$(1) \quad \sum_{n_1, \dots, n_{k+\ell} \leq x} \left[\frac{[n_1, \dots, n_k]^a}{(n_1, \dots, n_k)^c}, \frac{[n_{k+1}, \dots, n_{k+\ell}]^b}{(n_{k+1}, \dots, n_{k+\ell})^d} \right] \\ = \frac{C_{k,a,c;\ell,b,d}}{(a+1)^k (b+1)^\ell} x^{k(a+1) + \ell(b+1)} + O_\epsilon \left(x^{k(a+1) + \ell(b+1) - \frac{1}{2} + \epsilon} \right)$$

за свако $\epsilon > 0$, где је константа $C_{k,a,c;\ell,b,d}$ дата следећим Ојлеровим производом

$$\prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{k+\ell} \sum_{\nu_1, \dots, \nu_{k+\ell}=0}^{\infty} \frac{p^{\max\{(a \max - c \min)\{\nu_1, \dots, \nu_k\}, (b \max - d \min)\{\nu_{k+1}, \dots, \nu_{k+\ell}\}\}}}{p^{(a+1)(\nu_1 + \dots + \nu_k) + (b+1)(\nu_{k+1} + \dots + \nu_{k+\ell})}}.$$

Као један илустративни пример наводимо следећу асимптотску формулу

$$\sum_{n_1, n_2, n_3 \leq x} \left[\frac{[n_1, n_2]^3}{(n_1, n_2)}, n_3^2 \right] = \frac{C_{2,3,1;1,2,0}}{48} x^{11} + O_\epsilon \left(x^{\frac{21}{2} + \epsilon} \right)$$

где је константа експлицитно израчуната и дата са

$$C_{2,3,1;1,2,0} = \zeta(3)\zeta(6)\zeta(9)\zeta(11) \prod_p \left(1 - \frac{3}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \frac{2}{p^4} - \frac{1}{p^5} + \frac{2}{p^6} - \frac{7}{p^7} + \frac{10}{p^8} - \frac{9}{p^9} + \frac{5}{p^{10}} - \frac{1}{p^{11}} - \frac{1}{p^{12}} + \frac{5}{p^{13}} - \frac{9}{p^{14}} + \frac{10}{p^{15}} - \frac{7}{p^{16}} + \frac{2}{p^{17}} - \frac{1}{p^{18}} + \frac{2}{p^{19}} + \frac{1}{p^{20}} - \frac{3}{p^{21}} + \frac{1}{p^{23}} \right).$$

У четвртој глави су изложени ауторкини резултати из рада [2]. Главни резултат је асимптотска формула за суматорну функцију Ојлерове φ -функције зависне од комбинације НЗС и НЗД четири аргумента: за произвољне целобројне параметре $a, b, c, d \geq 0$, $a, b \geq 1$, $a \geq c$, $b \geq d$ и свако $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$ добијена је асимптотика облика

$$\sum_{n_1, n_2, n_3, n_4 \leq x} \varphi \left(\left[\frac{[n_1, n_2]^a}{(n_1, n_2)^c}, \frac{[n_3, n_4]^b}{(n_3, n_4)^d} \right] \right) = \frac{C_{a,c,b,d}}{(a+1)^2(b+1)^2} x^{2a+2b+4} + O_\epsilon \left(x^{2a+2b+\frac{7}{2}+\epsilon} \right),$$

где је константа $C_{a,c,b,d}$ такође дата одговарајућим Ојлеровим производом.

4. Закључак и предлог

Предмет докторске дисертације Кхоле Алгали је класична тематика која се у оквиру аналитичке теорије бројева проучава још од деветнаестог века. Резултати добијени у дисертацији су оригинални и представљају допринос теорији мултипликативних аритметичких функција више променљивих. Резултати дисертације су садржани у два самостална рада објављена у научним часописима са рецензијом, од којих је један у иностраном часопису са SCI листе.

Стога предлажемо Наставно-научном већу Математичког факултета да усвоји извештај комисије о докторској дисертацији кандидаткиње Кхоле Алгали и одреди комисију за усмену одбрану.

У Београду, 16. октобра 2019.

Чланови комисије:

проф. др Горан Банковић, ванредни професор (ментор)
Универзитет у Београду, Математички факултет

проф. др Зоран Петровић, редовни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

др Марко Радовановић, доцент
Универзитет у Београду, Математички факултет

проф. др Зоран Пуцановић, ванредни професор
Универзитет у Београду, Грађевински факултет