Наставно-научном већу
Математичког факултета
Универзитета у Београду

На 339. седници Наставно-научног већа Математичкој факултета, која је одржана 24. фебруара 2017. године, одређени смо за чланове комисије за преглед и оцену докторске дисертације *Алгебарска својства спектралних инваријанти у Флоровој хомологији* кандидата Јоване Николић. После прегледа рукописа који је Јована Николић предала комисији, подносимо Наставно-научном већу Математичког факултета следећи

ИЗВЕШТАЈ

1 Биографија кандидата

Јована Николић (рођена Ђуретић) рођена је 29.01.1987. у Подгорици. Дипломирала је 2008. године на Математичком факултету у Београду, смер Теоријска математика и примене, са просечном оценом 10,00. Мастер рад под називом *Геодезијске линије у Хоферовој метрици* је одбранила на Математичком факултету у Београду, код професора др Дарка Милинковића, 2010. године. Од 2009. године студент је докторских студија на Математичком факултету у Београду, на студијском програму Математика, модул Теоријска математика и примене. Положила је све испите са просечном оценом 10,00. Од 2009. до 2011. године радила је као сарадник у настави, од 2011. до данас као асистент за научну област Математичка анализа на Математичком факултету у Београду.

2 Научни и стручни рад

2.1 Објављени и прихваћени радови

[**1**] J. Đuretić, *From differentiation in affine spaces to connections*, The Teachings of Mathematics, Issue: XII_2, 61–80, 2015; ISSN 2406-1077 (Online), ISSN 1451-4966 (Print)

[**2**] J. Đuretić, J. Katić, D. Milinković, *Comparison of Spectral Invariants in Lagrangian and Hamiltonian Floer Theory,* Filomat **30 (5)**, 1161–1174, 2016.
DOI 10.2298/FIL1605161D; импакт фактор: 0.695, категорија M22

[**3**] J. Katić, D. Milinković, J. Nikolić, *Spectral Invariants in Lagrangian Floer homology of open subset*, Differential Geometry and its Applications, **53**, 220–267, 2017.
`https://doi.org/10.1016/j.difgeo.2017.05.009`; импакт фактор: 0.623, категорија M22

[**4**] J. Đuretić, *Piunikhin–Salamon–Schwarz Isomorphisms and Spectral Invariants for Conormal Bundle*, прихваћен за објављивање у Publications de l'Institut Mathématique; ISSN: 0350-1302, категорија M23

[**5**] J. Đuretić, *Piunikhin-Salamon- Schwarz isomorphisms and symplectic invariants obtained using cobordisms of moduli spaces*, Fourth mathematical conference of the Republic of Srpska, Proceedings, Trebinje, 06-07 June, vol. I (2015), 111–120; ISBN 978-99976-600-3-9.

[**6**] J. Djuretić, J. Katić, D. Milinković, *Hofer's geometry for Lagrangian submanifolds and Hamiltonian diffeomorphisms*, Fourth mathematical conference of the Republic of Srpska, Proceedings, Trebinje, 06-07 June, vol. I (2015), 93–100; ISBN 978-99976-600-3-9.

2.2 Радови на рецензији

- *Filtered Lagrangian Floer homology of product manifolds*
- *The moduli space of pseudo holomorphic disks with jumping Lagrangian boundary conditions*

2.3 Саопштења на конференцијама

- J. Nikolić, *The moduli space of pseudo holomorphic disks with jumping Lagrangian boundary conditions*, XIX Geometrical Seminar, Zlatibor 2016. (излагач)

- J. Katić, D. Milinković, J. Nikolić *Conormal Lagrangian Floer homology for open subset and PSS isomorphism*, Седми симпозијум Математика и примене, Београд, 2016.
- J. Katić, D. Milinković, J. Nikolić *Action spectrum and symplectic invariants in Floer theories*, Пети симпозијум Математика и примене, Београд, 2014.
- J. Đuretić, *Piunikhin-Salamon- Schwarz isomorphisms and symplectic invariants obtained using cobordisms of moduli spaces*, Fourth mathematical conference of the Republic of Srpska, Trebinje, 2014. (излагач)
- J. Đuretić, J. Katić, D. Milinković, *Hofer's geometry for Lagrangian submanifolds and Hamiltonian diffeomorphisms*, Fourth mathematical conference of the Republic of Srpska, Trebinje, 2014.

2.4 Учешће на пројектима

- Пројекат ОН174034 *Топологија, геометрија и глобална анализа на многострукостима и дискретним структурама* Министарства просвете, науке и технолошког развоја републике Србије

3 Структура дисертације

Докторска дисертација *Алгебарска својства спектралних инваријанти у Флоровој хомологији* написана је на VII+183+IV страна. Структура рукописа је следећа:

Увод и преглед резултата

1 Основни појмови и дефиниције

1.1 Диференцијално-тополошки појмови
1.2 Директан лимес
1.3 Морсова хомологија
1.4 Неке карактеристичне класе
1.5 Громовљева компактност
1.6 Флорова хомологија за периодичне орбите
1.7 Флорова хомологија за Лагранжеве пресеке
1.7.1 Конормалне Лагранжеве подмногострукости
1.7.2 Затворена симплектичка многострукост
1.8 Флорова хомологија за отворене скупове

4 Приказ садржаја дисертације

Прва глава **Увод и преглед резултата** почиње кратким историјским освртом на развој Морсове теорије, симплектичке топологије и Флорове теорије. Затим се излагање проширује на преглед настајања оних појмова у споменутим теоријама који су од значаја за проблеме у дисертацији. То су: Флорова хомологија за Лагранжеве пресеке (као уопштење случаја периодичних орбита), специјално, Флорова хомологија за Лагранжеве пресеке са конормалним граничним условима у амбијенту котангентног раслојења; затим Флорова хомологија за отворене подскупове; Пиуникин–Саламон–Шварцов изоморфизам у оригиналном облику, као и његова уопштења; и на крају спектралне инваријанте и њихова својства у разним ситуацијама у којима су досад изучаване. Осим тога, на крају ове уводне главе, дат је преглед резултата диертације, као и приказ структуре рукописа.

Глава 1 садржи основне дефиниције и ставове који су потребни у раду. Пре свега, то су разни диференцијално-тополошки појмови специфични за сиплектичку топологију. Ту је, затим, дефиниција директног лимеса, неопходна за конструкције у поглављима 1.7, 3.3, 4.3, 5.4 и 6.3. Даље је дата конструкција Морсове хомологије, Масловљевог индекса и Флорове хомологије за периодичне орбите, као и за Лагранжеве пресеке. Такође су описани и ПСС изоморфизми у оба случаја, као и Кастуриранган–Оова конструкција Флорове хомологије за отворене скупове. Дата је конструкција и канонских изоморфизама у Морсовој и разним случајевима у Флоровој теорији, као и опис Поенкареове дуалности у овим хомологијама.

Глава 2 садржи аналитичку позадину свих конструкција у тези. Она садржи оригиналне резултате који чине делове радова [3] и [4]. У њој се дефинишу модулски простори који представљају решења разних диференцијалних једначина. У неким случајевима ради се о парцијалној, Коши–Римановој једначини са периодичним, Лагранжевим или комбинованим граничним условима, у неким случајевима ради се о градијентној једначини са граничним условима, а у неким о комбинованој једначини. У свим овим ситуацијама коришћене су технике Фредхолмове анализе. Доказује се да су простори решења многострукости коначне димензије и рачуна се њихова димензија. У неким ситуацијама димензија је израчуната директно као индекс одговарајућег Фредхолмовог пресликавања, док су у неким ситуацијама (Параграф 2.4.2) коришћена извесна својства залепљеног оператора, као и већ познате димензије неких модулских простора. Осим овога, дат је и опис границе свих модулских простора у случајевима када се губи компактност. Главни апарат у доказима ових резултата чине Громовљеве теореме о конвергенцији низа хомолорфних пресликавања, као и технике лепљења, и (у Морсовом случају) Арцела–Асколијева теорема. Појава мехурова је контролисана граничним условима, и специфичност конкретне ситуације је детаљно објашњена. У Поглављу 2.4 посматра се модулски простор холоморфних панталона са граничним условима који су делом нулто сечење а делом конормално раслојење. Овде имамо скок на граници Риманове површи са једне Лагранжеве подмногострукости на другу, и то је једна ситуација која није досад описана у литератури,

Глава 3 садржи конструкцију разних морфизама између разних Флоро вих и Морсових хомологија. Морфизми су дефинисани на нивоу ланаца помоћу кардиналности нуладимезнионих модулских простора дефиниса них у Глави 2. Поглавље 3.1 садржи опис већ познате Алберсове конструкције морфизма између Флорове хомологије за периодичне орбите и Флорове хомологије за Лагранжеве пресеке. Поглавља 3.2 и 3.3 садрже оригиналне резултате који су објављени у радовима [3] и [4]. Поглавље 3.2 је посвећено конструкцији ПСС морфизма између Морсове хомологије подмогострукости $N \subset M$ базе и Флорове хомологије за конормално раслојење $\nu^*N \subset T^*M$, док је у Поглављу 3.3 дата конструкција ПСС морфизма између Морсове хомологије отвореног подскупа $U \subset M$ базе и Флорове хомологије за позитивно конормално раслојење $\nu_-^*\overline{U} \subset T^*M$. Овде се ради о морфизмима између разних Морсових хомологија са једне, и разних Флорових хомологија са друге стране, који су стога дефинисани помоћу комбинованих објеката из Поглавља 2.3 и 2.5. Да би се показало да су овако дефинисана пресликавања ланчаста, користе се описи граница разних једнодимензионих многострукости (такође комбинованих) који су дати у Глави 2. У овим ситуацијама су ПСС морфизми и изоморфизми, и то је доказано у тези помоћу описа граница добро изабраних помоћних једнодимензионих многострукости. Постоји још једна специфичност конструкције ПСС изоморфизма за отворене скупове из Поглавља 3.3. Наиме, домен и кодомен овог пресликавања јесу директни лимеси векторских простора. Зато ова конструкција захтева проверу добре дефинисаности, која се постиже комутирањем одговарајућих ПСС (изо)морфизама за апроксимације (које учествују у дефиницији директног лимеса) са морфизмима који дефинишу директни лимес. У овој глави се доказују и функторијалности ових изоморфизама у односу на канонске изоморфизме у Морсовој и Флоро вој теорији (варијација параметара).

Глава 4 је посвећена дубљем изучавању алгебарских структура Флорових хомологија дефинисаних у Глави 1. Наиме, бројањем разних пертурбовано-холоморфних Риманових површи са границом (које су описане у Глави 2) овде су дефинисани производи на једној Флоровој хомологији, или пак производи који спарују елементе из двеју различитих Флорових хомологија. Овај други случај је приказан у Поглављу 4.1, где се производ дефинише помоћу панталона код којих је једна ногавица „закрпљена”, а ивица друге ногавице је на Лагранжевој подмногогструкости. Бројање оваквих пресликавања дефинише спаривање елемената Флорове хомологије за периодичне орбите са елементима Флорове хомологије за Лагранжевој пресеке. Резултат је елемент Флорове хомологије за Лагранжеве пресеке. У Поглављу 4.2 дефинисан је производ на Флоровој хомологији за конормално раслојење

$$HF_*(o_M, \nu^*N) \otimes HF_(o_M, \nu^*N) \to HF_*(o_M, \nu^*N).$$

Овај производ је дефинисан помоћу броја панталона код којих на расцепу између ногавица постоји скок, при чему се један део те компоненте границе слика на нулто сечење а други део на конормално раслојење. Овај производ се разликује од до сада познатих производа који су увек били облика $HF_*(L_0, L_1) \otimes HF_*(L_1, L_2) \to HF_*(L_0, L_2)$, односно нису били дефинисани на Флоровој хомологији за исти пар. Доказано је да овај производ, компонован са ПСС изоморфизмом, даје производ који представља уопштење производа пресека на Морсовој хомологији (дуалног кап производу). У поглављу 4.3 дефинисан је производ у Флоровој хомологији за отворене скупове. И у овој конструкцији користи се слична идеја скока на расцепу између ногавица. За сваку од ових конструкција показана је добра дефинисаност на нивоу хомологија (будући да је производ а приори дефинисан на нивоу ланаца). Код производа за отворене скупове постоји још један корак у доказу добре дефинисаности. Наиме, прозвод се прво дефинише на хомологији за апроксимацију а затим се показује да се тако дефинисан производ слаже са директним лимесом. У оба случаја доказ се ослања на аргументе кобордизама, односно на опис границе добро одабраних помоћних многострукости (које су описане у Глави 2).

У **Глави 5** дефинисане су спектралне инваријанте у разним случајевима Флорових хомологија. Спектралне инваријанте су извесне критичне вредности Хамилтоновог функционала дејства, које се издвајају као најмањи ниво у филтрираној хомологији на ком се реализује нека сингуларна (односно Морсова) класа, у смислу ПСС изоморфизма. Појмови уведени у прва три поглавља су познати, и то су, редом: спектталне инваријанте за периодичне орбите, компактне Лагранжеве подмногострукости и конормална раслојења. У Поглављу 5.4 дефинисане су спектралне инваријанте у случају отвореног подскупа базе $U \subset M$ и ово је оригинални резултат објављен у [3]. Спектралне инваријанте су дефинисане помоћу ПСС изоморфизма дефинисаног у Поглављу 3.3.2, а затим је доказано да оне заправо представљају лимес спектралних инваријанти у Флоровој хомологији за Лагранжеве многострукости које апроксимирају сингуларну многострукост $\nu^*_-\overline{U}$. Затим се доказују очекивана својства спектралних инваријанти: независност од извесних параметара које учествују у дефиницији, непрекидност у односу на Хоферову норму Хамилтонијана и неједнакост између спектралних инваријанти за два отворена скупа $U \subset V$.

У **Глави 6** наставља се испитивање својстава спектралних инваријанти, са акцентом на разне неједнакости међу њима. У Поглављу 6.1 упоређење су спектралне инваријанте за Лагранжеву Флорову хомологију са спектралним инваријантама у Флоровој хомологији за периодичне орбите. Ово је оригинални резултат објављен у [2]. Доказ се ослања на праћење вредности функционала дејства дуж „димњака" дефинисаних у Поглављу 2.1. Овде се доказује и неједнакост троугла (односно субадитивност спектралних инваријанти) у односу на производ дефинисан у Поглављу 4.1. У поглављима 6.2 и 6.3 доказују се неједнакост троугла (односно субадитивност инваријанти) у конормалном, односно отвореном случају, у односу на производе дефинисане у поглављима 4.2 и 4.3.

Коначно, у **Глави 7** наводе се извесне могућности за даље истраживање спектралних инваријанти у Флоровој теорији. То су: конструкција нових квазиморфизама помоћу спектралних инваријанти; конструкција тзв. „убица спектра" (убица спектра је Хамилтониан са носачем у некој лопти који „убија" спектралне инваријанте свих Хамилтонијана који имају носач у тој лопти – убија у смислу да су инваријнате збира једнаке нули); контрукција Макс формуле за инваријанте за Лагранжеве пресеке, аналогне познатој формули за Морсову теорију и Флорову теорију за периодичне орбите; опис и разумевање везе (ако постоји) између спектралних инваријанти за отворене скупове који у пресеку дају неки затворени скуп и спектралних инваријанти датог затвореног скупа; понашање спектралних инваријанти у односу на C^0-лимесе.

5 Закључак и предлог

Рукопис *Алгебарска својства спектралних инваријанти у Флоровој хомологији* кандидата Јоване Николић садржи вредан научни допринос у Симплектичкој топологији и Глобалној анализи, посебно у Флоровој теорији за Лагранжеве пресеке и проучавању спектралних инваријанти. Кандидаткиња се успешно бави научним радом у овој области. Објавила је три научна рада (два коауторска и један самостални) која се односе на тему дисертације. Има још два рада из области на рецензији. Резултате из дисертације излагала је више пута на научним скуповима.

Имајући ово у виду, комисија предлаже Научно-наставном већу Математичког факултета у Београду да рукопис *Алгебарска својства спектралних инваријанти у Флоровој хомологији* кандидата Јоване Николић прихвати као докторску дисертацију и да одреди комисију за одбрану.

У Београду,
31. јула 2017. године

Чланови комисије

____

др Јелена Катић, доцент (ментор)

____

др Дарко Милинковић, редовни професор

____

др Божидар Јовановић, научни саветник