

**Научно-наставном већу Математичког факултета
Универзитета у Београду**

На 316. седници Научно-наставног већа Математичког факултета, која је одржана 28.11.2014. године, одређени смо за чланове комисије за писање извештаја о докторској дисертацији *Карактеризације неких расподела и Бахадурова асимптотска ефикасност тестова сагласности* кандидата мр Марка Обрадовића. Пошто је прегледала рукопис који је кандидат предао, Комисија подноси Научно-наставном већу Математичког факултета следећи

ИЗВЕШТАЈ

Докторска дисертација *Карактеризације неких расподела и Бахадурова асимптотска ефикасност тестова сагласности* има 130 страна текста и следећу општу структуру:

1. Карактеризације расподела
 2. Нове карактеризације експоненцијалне расподеле
 3. Тестови сагласности засновани на карактеризацијама
 4. Бахадурова ефикасност
 5. Тестови сагласности с Паретовом расподелом
 6. Тестови сагласности с експоненцијалном расподелом
 7. Закључак
- Литература (89 библиографских јединица)

Предмет докторске дисертације

Предмет докторске дисертације припада теорији расподела и непараметарској асимптотској статистици. Прве карактеризације расподела датирају од тридесетих година прошлог века. Ова област, која је на граници теорије вероватноће и математичке статистике, привлачи интересовање великог броја истраживача, а у последње време све је већи број радова на ову тему. Највећи број карактеризација посвећен је експоненцијалној расподели и нормалној расподели. У дисертацији су формулисане нове карактеризације експоненцијалне и Паретове расподеле. Посебан акценат је на карактеризацијама помоћу једнакорасподељених функција узорка.

Тестови сагласности с расподелом су међу најважнијим непараметарским тестовима. Велики број њих заснован је на емпиријској функцији расподеле (нпр. тест Колмогоров-Смирнова, Крамер-Фон Мизеса). Примена карактеризационих теорема за конструкцију тестова сагласности појавила се средином двадесетог века, а последњих година постала је један од најпопуларнијих праваца у тој области. Предност оваквих тестова је то што су често слободни од параметара расподеле, па омогућавају тестирање сложених нултих хипотеза. У раду су конструисани нови тестови сагласности засновани како на новим, тако и на већ постојећим карактеризацијама.

Асимптотска ефикасност тестова један је од видова упоређивања тестова с истом нултом и алтернативном хипотезом. Постоји неколико типова асимптотске ефикасности. Бахадурова асимптотска ефикасност има предност јер се може применити и на тест статистике чија гранична расподела није нормална. Развојем теорије великих одступања (large deviation theory) у последње време развија се и Бахадурова теорија. У раду је за сваки тест испитана и асимптотска расподела тест статистике под нултом хипотезом, као и Бахадурова асимптотска ефикасност теста против различитих блиских алтернатива. Одређен је и домен локалне асимптотске оптималности, тј. класа алтернатива против којих је тест асимптотски оптималан.

Радови

Кандидат је до сада објавио, или су му прихваћени за штампу, шест радова, од чега пет у часописима са SCI листе. За тематику дисертације везани су радови 1–5. На рецензији су још три рада из области дисертације, од којих је један самосталан.

1. М. Обрадовић, On Asymptotic Efficiency of Goodness of Fit Tests for Pareto Distribution Based on Characterizations, *Filomat*, accepted for publication, (2015). (14 страна) **IF: 0.753**

2. М. Обрадовић, Three Characterizations of Exponential Distribution Involving the Median of Sample of Size Three *arXiv preprint arXiv:1412.2563* (2014)

3. М. Обрадовић, М. Јовановић, Б. Милошевић, Goodness-of-fit tests for Pareto distribution based on a characterization and their asymptotics, *Statistics*, DOI: 10.1080/02331888.2014.919297. (2014) 1–16. **IF: 1.594**

4. М. Јовановић, Б. Милошевић, Я. Ю. Никитин, М. Обрадовић, К. Ю. Волкова, Tests of exponentiality based on Arnold-Villasenor characterization, and their efficiencies, *arXiv preprint arXiv:1407.5014* (2014)

5. Б. Милошевић, М. Обрадовић, Some characterizations of exponential distributions based on order statistics, arXiv preprint arXiv:1412.5019 (2014)
6. В. Јевремовић, М. Обрадовић, Bertrand's paradox – is there anything else?, *Quantity & Quality* 46.6 (2012) 1709–1714. ISSN: 0033-5177 **IF: 0.768**
7. М. Обрадовић, М. Јовановић, Б. Милошевић, В. Јевремовић, Estimation of $P\{X \leq Y\}$ for Geometric-Poisson Model, *Hacetatepe Journal of Mathematics and Statistics*, DOI: 10.15672/HJMS.2014267477. (2014) 1–16. **IF: 0.433**
8. М. Ункашевић, И. Тошић, М. Обрадовић, Spectral analysis of the Koshava wind, *Theoretical and applied climatology* 89.3-4 (2007) 239–244. ISSN: 0177-798X **IF: 1.674**
9. М. Обрадовић, М. Јовановић, Б. Милошевић, Optimal unbiased estimates of $P\{X < Y\}$ for some families of distributions, *Metodološki zvezki - Advances in Methodology and Statistics*, 11.1) (2014) 21–29. ISSN: 1854-0031

Приказ дисертације и резултати

Дисертација садржи шест поглавља. У првом поглављу изложене су познате карактеризације различитих расподела: експоненцијалне, Паретове, нормалне, степене, логистичке, равномерне, гама, Кошијеве. Ту су наведене и доказане две карактеризације Паретове расподеле, које су последице радова Пури-Рубина и Ахсанулаха, који су дали карактеризације за експоненцијалну расподелу. Прва карактеризација дата је у Теорему 1.1.6, која разматра једнако расподељене ненегативне апсолутно непрекидне случајне величине X и Y и тврди да X и $\max\{\frac{X}{Y}, \frac{Y}{X}\}$ имају исту расподелу, ако и само ако расподела случајне величине X има Паретову расподелу. Друга карактеризација дата је у Теорему 1.1.8, која разматра три једнако расподељене ненегативне случајне величине X_1, X_2 и X_3 , са строго монотоним функцијом расподеле и монотоним растућом или опадајућом хазардном функцијом. Тврди се да $(X_{(j+1;n)}/X_{(j;n)})^{n-j}$ и $(X_{(k+1;n)}/X_{(k;n)})^{n-k}$, $1 \leq j \leq k < n$, имају исту расподелу ако и само ако X_1 има Паретову расподелу.

У другом поглављу дато је шест карактеризација експоненцијалне расподеле, као одговор на отворена питања које су поставили Арнолд и Виљасењор [1]. Прве три засноване су на узорцима обима три, а преостале две на узорцима произвољног обима. Све се разматра на класи функција расподеле из скупа \mathcal{F} , за које важи $F(0) = 0$ и чија се густина може развити у Маклоренов ред за свако $x > 0$. Наводимо две од поменутих теорема. Теорема 2.2.1 разматра независне случајне величине X_1, X_2, X_3 с расподелом $F \in \mathcal{F}$ и тврди да, ако важи једнакост у расподели

$\frac{1}{3}X_1 + \frac{1}{2}X_2 = X_{(2;3)}$, тада X има експоненцијалну расподелу с неким $\lambda > 0$. Следећа теорема (2.4.3) даје репрезентацију статистике поретка реда k преко пондерисане суме независних случајних величина. Теорема 2.4.3 разматра случајни узорак X_1, \dots, X_n из расподеле F која припада \mathcal{F} . Нека је k фиксирани број такав да је $1 < k \leq n$. Теорема тврди да, ако доња једнакост важи у расподели $\frac{1}{n}X_1 + \frac{1}{n-1}X_2 + \dots + \frac{1}{n-k+1}X_k = X_{(k;n)}$ онда X има експоненцијалну расподелу с неким параметром $\lambda > 0$.

Треће и четврто поглавље су прегледног типа, у којима се припрема основа за пето и шесто поглавље. У трећем поглављу уводе се појмови U и V -статистике, њихова асимптотска својства и емпиријске функције расподеле, што ће да се користи у тестовима сагласности. У четвртом поглављу се уводи Бахадурова ефикасност код тестова сагласности.

У петом поглављу се испитују тестови сагласности интегралног и Колмогоровљевог типа за Паретову расподелу, који се базирају на карактеризацијама Паретове расподеле из теорема 1.1.6 и на специјалним случајевима карактеризације из рада [2] и теореме 1.1.8. Укупно је предложено шест тестова. Тестира се сложена нулта хипотеза да је узорак из фамилије Паретових расподела $H_0 : F \in \mathcal{P}$, против опште алтернативе $H_1 : F \notin \mathcal{P}$ с истим носачем $[1, \infty)$. Тест статистике су $T_n = \int_1^\infty (M_n(t) - F_n(t))dF_n(t)$ и $V_n = \sup_{t \geq 1} |M_n(t) - F_n(t)|$, где је $F_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I\{X_i \leq t\}$ емпиријска функција расподеле узорка (X_1, X_2, \dots, X_n) , а $M_n(t)$ је U -емпиријска функција расподеле заснована на одговарајућој карактеризационој теореме. За свих шест тестова израчунате су локалне Бахадурове ефикасности у случају блиских алтернатива. Расподеле које су разматране као алтернативе су следеће: (1) лог-Вејбулова расподела с густином $g_1(x; \theta) = (1 + \theta)x^\theta e^{-x^{1+\theta}}$, $x \geq 1, \theta \in (0, 1)$; (2) лог-гама расподела с густином $g_2(x; \beta, \theta) = \frac{x^\theta}{\Gamma(1+\theta)} e^{-x}$, $x \geq 1, \theta \in (0, 1)$; (3) и (4) расподела с густином $g_3(x; \theta) = \frac{1}{x^2} (e^{-\theta(\ln x)^\beta} + \theta\beta(\ln x)^{\beta-1} e^{-\theta(\ln x)^\beta})$, $x \geq 1, \beta > 1, \theta \in (0, 1)$ за вредности параметра $\beta = 1.5$ и $\beta = 2$; (5) инверзна бета расподела с густином $g_4(x; \theta) = \frac{1+\theta}{x^2} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^\theta$, $x \geq 1, \theta \in (0, 1)$ и (6) Паретова расподела с такозваним “тилт” параметром с густином $g_5(x; \theta) = \frac{1+\theta}{(x+\theta)^2}$, $x \geq 1, \theta \in (0, 1)$. За све случајеве је нађена Бахадурова ефикасност.

У шестом поглављу се испитују тестови сагласности интегралног и Колмогоровљевог типа за експоненцијалну расподелу, који се базирају на једној карактеризацији експоненцијалне расподеле из другог поглавља. Директна последица теореме 2.4.3 представља потврду хипотезе, која је постављена у раду [1], а која је такође карактеризација експоненцијалне расподеле. Наиме, из теореме 2.4.3 следи да ако је X_1, \dots, X_n случај-

јни узорак из расподеле F која припада \mathcal{F} и ако важи $X_1 + \frac{1}{2}X_2 + \dots + \frac{1}{n}X_n = X_{(n;n)}$, онда X има експоненцијалну расподелу с неким параметром $\lambda > 0$. Базирана на овој карактеризацији, тестира се сложена нулта хипотеза да је узорак из експоненцијалне расподеле, где је λ непознати параметар. Предложен је низ тестова у зависности од броја сабирака у карактеризацији, а детаљније су разматрани случајеви $n = 2$ и $n = 3$, који имају практични значај. Као алтернативне расподеле разматрају се следеће четири расподеле, које су блиске експоненцијалној: (1) Макехамова расподела с густином $g_1(x, \theta) = (1 + \theta(1 - e^{-x}))e^{-x - \theta(e^{-x} - 1 + x)}$, $\theta > 0, x \geq 0$; (2) Вејбулова расподела с густином $g_2(x, \theta) = (1 + \theta)x^\theta e^{-x^{1+\theta}}$, $\theta > 0, x \geq 0$; (3) гама расподела с густином $g_3(x, \theta) = \frac{x^\theta}{\Gamma(\theta+1)}e^{-x}$, $\theta > 0, x \geq 0$ и (4) мешавина експоненцијалних расподела с негативним тежинама с густином $g_4(x) = (1 + \theta)e^{-x} - \theta\beta e^{-\beta x}$, $x \geq 0, \theta \in (0, \frac{1}{\beta-1}]$. Израчуната је локална Бахадурова ефикасност против наведених алтернатива.

[1] В.С. Arnold, J.A. Villasenor, Exponential characterizations motivated by the structure of order statistics in samples of size two, *Stat Probab Lett* 83.2, (2013), 596 – 601.

[2] Н.-Ј. Rossberg, Characterization of the exponential and the Pareto distributions by means of some properties of the distributions which the differences and quotients of order statistics are subject to, *Statistics*, 3.3, (1972) 207–216.

Закључак

Марко Обрадовић је током израде ове дисертације изучио обимну литературу, која је у вези са темом ове дисертације, а која је веома актуелна, како са теоријског, тако и са практичног становишта. Добио је више нових резултата који се односе на карактеризације различитих расподела. На основу тих нових карактеризација, а и за неке већ познате карактеризације, формирао је непараметарске тестове, нашао асимптотске расподеле тест статистика под нултом хипотезом, као и Бахадурову асимптотску ефикасност тестова против различитих блиских алтернатива.

Предлажемо Научно-наставном већу Математичког факултета да рукопис *Карактеризације неких расподела и Бахадурова асимптотска ефикасност тестова сагласности* кандидата мр Марка Обрадовића прихвати као докторску дисертацију и одреди комисију за усмену одбрану.

У Београду, 12.02.2015.

Комисија за преглед и оцену докторске дисертације:

др Слободанка Јанковић, редовни професор - ментор

др Весна Јевремовић, ванредни професор

др Јаков Јурјевич Никитин, редовни професор
Факултет за математику и механику
Државног универзитета у Санкт Петербургу