

Наставно-научном већу Математичког факултета Универзитета у Београду

На седници Научно-наставног већа Математичког факултета Универзитета у Београду, која је одржана 24. марта 2023. године, именовани смо за чланове Комисије за оцену докторске дисертације *Стохастичка предвидивост филтрација и процеса по непрекидном параметру* докторанда Ане Меркле. После прегледа рукописа који је Ана Меркле предала комисији, подносимо Научно-наставном већу следећи

ИЗВЕШТАЈ

1 Биографија кандидата

Ана Меркле је уписала основне студије на Математичком факултету (смер Статистика, актуарска и финансијска математика) 2014. године и завршила 2018. године са просеком 9.36. Мастер студије је завршила на истом смеру 2019. године са просеком 9.75, одбранивши мастер рад под насловом „Мартингали и стохастичка интеграција”. Докторске студије на Математичком факултету Универзитета у Београду (студијски програм Математика) је уписала 2019. године.

2 Научни рад кандидата

Објављени научни радови

1. D. Valjarević, **A. Merkle**, Statistical causality and measurable separability of σ -algebras, *Statistics and Probability Letters*, 177(C), (2021),
2. **A. Merkle**, Predictability and uniqueness of weak solutions of the stochastic differential equations, *Analele Stiintifice ale Universitatii Ovidius Constanta*, 31(1) (2023) 207-219,
3. **A. Merkle**, Causal predictability and weak solutions of the stochastic differential equations with driving semimartingales, *Statistics and Probability Letters*, (2023),
4. **A. Merkle**, Causal predictability between stochastic processes and filtrations, *Stochastics: An International Journal of Probability and Stochastic Processes*, (2023).

Учешће на научном скупу

1. A. Merkle, Stochastic Predictability and Applications on Stochastic Differential Equations, Conference on Stochastic Analysis and Stochastic Partial Differential Equations, Centre de Recerca Matematica, Barcelona, 2022.

Учешће на радионицама

1. Advanced Course on Stochastics Tools in Finance (IRP in Quantitative Finance), workshop, Centre de Recerca Matematica, Barcelona, 2021.

3 Предмет дисертације

Предмет докторске дисертације је дефинисање нових облика зависности између случајних процеса и фамилија σ -алгебри догађаја, односно филтрација, и анализирање њихових веза. Идеја увођења времена код испитивања зависности и међусобног утицаја појава је значајна и за предвиђање разматраних појава. У раду се разматрају филтрације и случајни процеси по непрекидном параметру јер модели са непрекидним временом имају широку примену у финансијама, економетрији, биостатистици, неуронауци, екологији, епидемиологији, демографији и другим областима науке.

Добијени су нови резултати по угледу на постојеће, на пример, Жакода, Флоренса и Фужера, који се односе на дефинисање различитих облика зависности између филтрација, као и случајних процеса и филтрација у непрекидном случају. Дефинисан је и нови концепт зависности под називом узрочна предвидивост. Разматрана је веза уведене релације са познатим дефиницијама зависности и примене добијених резултата у стохастичкој анализи, у теорији мартингала, при решавању мартингалног проблема и проблема мартингалне репрезентације, као и у финансијској математици код моделирања заштите од ризика.

У раду су примењене главне методе стохастичке анализе: условно математичко очекивање, условна независност, стохастичка интеграција по процесу Брауновог кретања и по семимартингалима, Итов метод диференцирања случајних процеса. Примењене су и методе функционалне анализе које се односе на меру - вероватноћу.

4 Приказ дисертације

Дисертација је написана на 85 + VII страна. Главни део дисертације је подељен на Увод и 4 главе. Литература се састоји од 70 библиографских јединица.

У првој глави (*Случајни процеси са непрекидним параметром*) су наведени резултати из Теорије случајних процеса, који се користе у наставку рада. Важан појам у Теорији мартингала су случајна времена, специјално времена заустављања. У овом делу су дефинисана времена заустављања и мерљивост процеса са непрекидним параметром, као и Винеров процес и дате су неке његове основне особине. Наведни су и основни ставови из Теорије мартингала са непрекидним параметром. Резултати и методе из Теорије мартингала представљају једну од главних техника у многим областима Теорије вероватноћа, као што су стохастичка интеграција и марковски процеси.

Такође, финансијска математика користи Теорију мартингала као главни алат у проучавању финансијских тржишта и финансијских деривата. У тези је дефинисан простор непрекидних мартингала M , као и простори M_c^2 , M_b^c и M_c^u који садрже, редом, непрекидне, ограничене и униформно интеграбилне мартингале са почетним вредностима у нули. Описан је и простор M_c^{loc} непрекидних локалних мартингала са почетним вредностима у нули и проширен је појам квадратне варијације и квадратне коваријације на локалне мартингале.

У другој глави (*Стохастички интеграл*) је описан начин дефинисања стохастичког интеграла облика $\int_{[0,t]} X dM$, где је X процес који задовољава одређене услове мерљивости и интеграбилности, по процесима чије трајекторије немају ограничене варијације, прецизније, за све процесе M који припадају класи процеса познатих под називом непрекидни семимартингали. Приказан је поступак конструкције стохастичког интеграла по различитим класама мартингала. Прво се разматра интеграл елементарних процеса, а затим се тако дефинисан стохастички интеграл проширује на класе непрекидних мартингала и семимартингала. Семимартингали представљају најширу класу процеса за коју је дефинисан стохастички интеграл. Семимартингале су дефинисали Долеанс-Ладе и Мејер 1970. године. У овом делу су наведене и основне особине стохастичких интеграла. Стохастичка интеграција по семимартингалима се може схватити као проширење Стилтјесовог интеграла по трајекторијама. У истој глави је наведен и један од најпознатијих резултата у стохастичкој анализи, формула Итоа, која је стохастичка верзија Њутн-Лајбницевог формуле из теорије класичне интеграције.

Трећа глава дисертације (*Стохастичке диференцијалне једначине*) је посвећена стохастичким диференцијалним једначинама, које су мотивисале Итоа на конструкцију стохастичког интеграла. Дате су дефиниције слабог и строгог решења стохастичких диференцијалних једначина као и услови за њихову егзистенцију и јединственост. Наведене су основне дефиниције, као и резултати који се односе на неке од особина решења стохастичких диференцијалних једначина Итоа, које се разматрају у наредном поглављу. Описане су и стохастичке дифе-

ренцијалне једначине са семимартингалима и дефинисана њихова решења. Оне су, такође, предмет проучавања у дисертацији.

Четврта глава (*Узрочност, стохастичка предвидивост и примене*) садржи нове теоријске резултате. У оквиру ње су дефинисани нови облици зависности између случајних појава који су дефинисани преко познатог концепта условне независности. Разматрају се два главна случаја: зависност између филтрација и зависност између случајних процеса и филтрација. У оба случаја је дефинисан нови облик зависности под називом узрочна предвидивост. У поглављу 4.2 је дефинисана узрочна предвидивост између филтрација, а у поглављу 4.3 узрочна предвидивост између случајних процеса и филтрација. Наведени су различити алтернативни облици дефинисања уведених релација као и њихове особине и везе са познатим облицима зависности у теорији случајних процеса.

Поред тога, у истој глави је дат велики број примера примене стохастичке предвидивости. Добијени су и нови резултати, у терминима стохастичке предвидивости, који се односе на слабу јединственост слабих решења стохастичких диференцијалних једначина Итоа и стохастичких диференцијалних једначина са семимартингалима (поглавље 4.3). Полазна тачка за ове резултате су били познати резултати из литературе исказани преко других појмова из Теорије случајних процеса, специјално Теорије мартингала и процеса Брауновог кретања. Наведени су примери примене стохастичке предвидивости у финансијској математици код одређивања вредности уговора са могућим неизвршењем и моделирања заштите од ризика (поглавље 4.4). Разматрана је и веза између различитих концепата узрочности и појма мерљиве раздвојености који је централна тема у статистици (поглавље 4.5)

Резултати из поглавља 4.2, 4.3, 4.4 и 4.5 представљају оригиналне научне резултате ове докторске дисертације, а објављени су у три самостална рада и једном коауторском раду докторанда (наведено у делу 2 овог извештаја).

5 Закључак

У раду је дефинисан нови облик зависности између филтрација и случајних процеса под називом стохастичка предвидивост. Уведени облик зависности се може применити у различитим областима науке за добијање других облика познатих резултата, као и за добијање нових резултата. Уведени појмови и добијени резултати се потенцијално могу применити за предвиђање појава које се мењају у времену.

Кандидаткиња је у тези демонстрирала техничко умеће изводећи сложене закључке. Проучила је и опсежну литературу, показала одлично познавање области и оспособљеност за самостално истраживање.

Кандидаткиња Ана Меркле је до сада објавила четири рада у часописима са SCI листе, од тога три самостална. На основу свега наведеног, како су испуњени и сви формални услови, предлажемо да се рукопис *Стохастичка предвидивост филтрација и процеса по непрекидном параметру* прихвати као докторска дисертација из математике и да се закаже њена јавна одбрана.

У Београду, 11.5.2023.

Чланови комисије:

др Бојана Милошевић, ванредни професор
Универзитет у Београду
Математички факултет

др Ленка Главаш, доцент
Универзитет у Београду
Математички факултет

др Марија Милошевић, редовни професор
председник комисије
Универзитет у Нишу
Природно-математички факултет