

**Наставно-научном већу  
Математичког факултета  
Универзитета у Београду**

На 387. седници Наставно-научног већа Математичког факултета Универзитета у Београду, која је одржана 19.11.2021. године, одређени смо за чланове Комисије за преглед и оцену докторске дисертације „*Истовремено неанулирање  $L$ -функција квадратних твистова елиптичке криве и квадратних Дирихлеових  $L$ -функција над функцијским пољима*” кандидата Николе Леласа. Након прегледа рукописа који је Никола Лелас предао комисији, подносимо Наставно-научном већу следећи

## **ИЗВЕШТАЈ**

### **1. Биографија кандидата**

Никола Лелас је рођен у Београду 3. новембра 1991. године. Завршио је Основну школу „Лазар Саватић” у Земуну и Математичку гимназију у Београду као носилац Вукове дипломе. Године 2010. је уписао основне студије на Математичком факултету, смер Теоријска математика и примене. Дипломирао је 2014. године као студент генерације са просечном оценом 9.95. Исте године је уписао Мастер студије на Математичком факултету, које је завршио 2015. године са просеком 10.00, одбранивши мастер рад „Теорема Чеботарева о густини и њене примене на аритметику елиптичких кривих” под менторством проф. др Горана Банковића. Од 2015. године је студент докторских студија на Математичком факултету, студијски програм Математика.

Од 2014. године запослен је на Математичком факултету и то на Катедри за математичку анализу у периоду 2014.–2015. као сарадник у настави и на Катедри за алгебру и математичку логику почевши од 2015. (као сарадник у настави до 2016. и као асистент од 2016.). У досадашњем раду је држао часове вежби из Анализе 1, Алгебре 1, Алгебре 2, Алгебре 3, Елементарне теорије бројева, Линеарне алгебре, Теорије бројева 1 и Теорије бројева 2.

### **2. Списак научних радова кандидата**

1. G. Djanković, D. Đokić, N. Lelas, I. Vrećica, *On some hybrid power moments of products of generalized quadratic Gauss sums and Kloosterman sums*, Lithuanian Mathematical Journal, Vol. 58, No. 1 (2018), pp. 1-14, ISSN: 0363-1672, DOI: 10.1007/s10986-018-9383-6, IF 2018: 0.566, M22.

2. D. Đokić, **N. Lelas**, I. Vrećica, *Large values of Dirichlet L-functions over function fields*, International Journal of Number Theory, Vol. 16, No. 5 (2020), pp. 1081-1109, ISSN: 1793-0421, DOI: 10.1142/S1793042120500566, IF 2020: 0.674, M23.
3. G. Djanković, D. Đokić, **N. Lelas**, *The triple reciprocity law for the twisted second moments of Dirichlet L-functions over function fields*, Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 149, No. 7 (2021), pp. 2851-2860, ISSN: 0002-9939, DOI: 10.1090/proc/15507, IF 2020: 1.016, M22.
4. **N. Lelas**, *Extremal behaviour of  $\pm 1$ -valued completely multiplicative functions in function fields*, Glasnik Matematički, Vol. 56, No. 1 (2021), pp. 79-94, ISSN: 0017-095X, DOI: 10.3336/gm.56.1.06, IF 2020: 0.660, M23.

#### Препринт:

5. **N. Lelas**, *Simultaneous nonvanishing of quadratic twists of elliptic curve L-functions and quadratic Dirichlet L-functions over function fields*, на рецензији.

### 3. Саопштења кандидата на научним скуповима

1. Г. Банковић, **Н. Лелас**: *Коваријанса између уопштених фон Манголтових и дивизорских функција у  $\mathbb{F}_q[t]$* , VII Symposium Mathematics and applications, Belgrade, 2016, резиме доступан на [http://alas.matf.bg.ac.rs/~konferencija/s2016/Djankovic,Lelas\\_apstrakt.pdf](http://alas.matf.bg.ac.rs/~konferencija/s2016/Djankovic,Lelas_apstrakt.pdf)
2. G. Djanković, D. Djokić, **N. Lelas**, I. Vrećica: *The fourth moment and large values of Dirichlet L-functions over rational function fields*, X Symposium Mathematics and applications, Belgrade, 2019, резиме доступан на [http://alas.matf.bg.ac.rs/~konferencija/s2016/Djankovic,Lelas\\_apstrakt.pdf](http://alas.matf.bg.ac.rs/~konferencija/s2016/Djankovic,Lelas_apstrakt.pdf)

### 4. Учешћа кандидата у летњим школама и научним скуповима

1. Hausdorff Summer School: *L-functions, Open problems and current methods*, Hausdorff Center for Mathematics, University of Bonn, Germany, 2018

2. Hausdorff Summer School: *The Circle method: Entering its Second Century*, Hausdorff Center for Mathematics, University of Bonn, Germany, 2021
3. Hausdorff Summer School: *Polynomial methods*, Hausdorff Center for Mathematics, University of Bonn, Germany, 2021

## 5. Предмет докторске дисертације

Докторска дисертација припада научној области *Теорија бројева*, а конкретни проблеми који се у њој изучавају припадају *теорији  $L$ -функција*.

Разумевање нула  $L$ -функција различитих фамилија је значајно услед њихове повезаности са бројним интересантним аритметичким, геометријским и алгебарским објектима. Тако је егзистенција бесконачно много простих бројева у аритметичким прогресијама последица чињенице да се Дирихлеове  $L$ -функције придружене нетривијалним карактерима *не анулирају* у тачки 1, док се доказ Теореме о простим бројевима базира на чињеници да постоји (мали) регион лево од праве  $\Re(s) = 1$  у коме се Риманова зета функција не анулира. Уопштена Риманова хипотеза каже да се све нетривијалне нуле Дирихлеових  $L$ -функција (над пољем  $\mathbb{Q}$ ) налазе на правој  $\Re(s) = 1/2$  и додатно верује се да не постоје нетривијалне  $\mathbb{Q}$ -линеарне релације међу ненегативним ординатама ових нула. Значајна је и тзв. Човлина хипотеза из 1965. године, која предвиђа да се Дирихлеове  $L$ -функције не анулирају у тачки  $\frac{1}{2}$ . За случај фамилије квадратних Дирихлеових карактера над пољем  $\mathbb{Q}$ , К. Саундарарајан је доказао да се бар 87.5% функција не анулира у централној тачки у раду *Nonvanishing of quadratic Dirichlet  $L$ -functions at  $s = 1/2$* , *Annals of Mathematics*, 152 (2000).

Уопштено говорећи, за  $L$ -функцију се не очекује да се анулира у централној тачки, што је тачка симетрије њој одговарајуће функционалне једначине, осим ако за то не постоји неки дубог разлог. Један пример ове ситуације пружа хипотеза Берча и Свинертон-Дајера. Мордел-Вејлова теорема каже да је група рационалних тачака на елиптичкој кривој  $E$  коначно генерисана, односно да је  $E(\mathbb{Q}) \cong T(E) \oplus \mathbb{Z}^r$ , где је  $T(E)$  коначна торзиона подгрупа, а  $r \geq 0$  ранг елиптичке криве. Елиптичкој кривој  $E$  може се придружити одговарајућа Хасе-Вејлова  $L$ -функција и хипотеза Берча и Свинертон-Дајера каже да је онда Тејлоров развој те  $L$ -функције око централне тачке  $1/2$  једнак

$$L(E, s) = c(s - \frac{1}{2})^r + \text{чланови вишег реда}$$

где је  $r$  баш ранг групе  $E(\mathbb{Q})$ , а  $c$  је нека константа. Дакле, Хасе-Вејлова  $L$ -функција придружена елиптичкој кривој  $E$  се не анулира у централној тачки ако и само ако је група рационалних тачака те криве коначна.

Први део дисертације бави се проблемом истовременог неанулирања  $L$ -функција квадратних твистова елиптичке криве (и њихових извода) и квадратних Дири-

хлеових  $L$ -функција у централној тачки  $\frac{1}{2}$ , у ситуацији када су ови објекти дефинисани над рационалним функцијским пољем над коначним пољем  $\mathbb{F}_q$ . Нека је  $\chi_D$  ознака за квадратни карактер придружен моничном полиному  $D \in \mathbb{F}_q[t]$  и  $E \otimes \chi_D$  ознака за одговарајући квадратни твист (фиксирани) елиптичке криве  $E$  тим карактером. Поменути објектима се онда могу придружити одговарајуће  $L$ -функције  $L(\chi_D, s)$  и  $L(E \otimes \chi_D, s)$ . У дисертацији су одређене доње границе броја полинома  $D \in \mathcal{H}_{2g+1}^*$  за које се  $L(E \otimes \chi_D, \frac{1}{2})$  и  $L(\chi_D, \frac{1}{2})$ , односно  $L'(E \otimes \chi_D, \frac{1}{2})$  и  $L(\chi_D, \frac{1}{2})$  истовремено не анулирају, при чему је  $\mathcal{H}_{2g+1}^*$  скуп свих моничних полинома степена  $2g+1$  над  $\mathbb{F}_q$  који су узајмно прости са дискриминантом елиптичке криве  $E$ . У сврху добијања тих резултата изведене су асимптотске формуле за мешовите моменте

$$\frac{1}{|\mathcal{H}_{2g+1}^*|} \sum_{D \in \mathcal{H}_{2g+1}^*} L\left(E \otimes \chi_D, \frac{1}{2}\right) L\left(\chi_D, \frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{1}{|\mathcal{H}_{2g+1}^*|} \sum_{D \in \mathcal{H}_{2g+1}^*} \varepsilon_E^-(D) L'\left(E \otimes \chi_D, \frac{1}{2}\right) L\left(\chi_D, \frac{1}{2}\right)$$

када  $g \rightarrow \infty$ , при чему, за свако  $D \in \mathcal{H}_{2g+1}^*$ ,  $\varepsilon_E^-(D)$  узима вредност 0, односно 1, у зависности од тога да ли је знак функционалне једначине за  $L(E \otimes \chi_D, s)$  једнак 1, односно  $-1$ .

Други део дисертације бави се за хипотезама о количницима  $L$ -функција, које представљају хипотезе о асимптотском понашању количника два производа  $L$ -функција из неких фамилија. У класичном контексту поља рационалних бројева, Конри, Фармер и Цирнбауер су у раду *Autocorrelation of ratios of L-functions*, Commun. in Number Theory and Physics, vol. 2, 3 (2008), демострирали хеуристичке аргументе помоћу којих се такве хипотезе могу дати за различите значајне фамилије  $L$ -функција. У раду *The Ratios Conjecture and upper bounds for negative moments of L-functions over function fields*, arXiv:2109.10396, аутори Буи, Флореа и Китинг формулишу хипотезу о количницима за фамилију квадратних Дирихлеових  $L$ -функција над функцијским пољима и дају њен доказ за количник по једне такве функције. У дисертацији је приказан доказ варијације хипотезе о количницима за случај количника  $L$ -функције квадратног твиста елиптичке криве и квадратне Дирихлеове  $L$ -функције над функцијским пољима.

## 6. Приказ дисертације

Дисертација се састоји од увода на 2 стране, текста од 100 страна, подељеног на 7 глава, списка литературе од 100 библиографских јединица и биографије аутора. Прве четири и шеста глава су уводног карактера и у њима су приказани познати резултати, док су пета и седма глава посвећене приказивању оригиналних резултата.

У уводном делу прве главе дат је кратак приказ неколико класичних резултата теорије бројева и њихове везе са теоријом  $L$ -функција: Теорема о простим бројевима, Дирихлеова теорема о простим бројевима у аритметичкој прогресији и формула класног броја. Централни део главе посвећен је теорији момената  $L$ -функција. Дат је приказ познатих резултата о моментима Риманове зете функције и приказан је модел Китинга и Снејт за давање хипотеза о моментима  $L$ -функција, који је базиран за теорији случајних матрица. Поред овог модела, детаљно је приказан и флексибилнији и моћнији модел Конрија, Фармера, Китинга, Рубинштајна и Снејт. Последњи део главе посвећен је проблему неанулирања  $L$ -функција. Приказане су класичне хипотезе Берча и Свинертон-Дајера и Човле, као и метод молификације који је један од основних приступа добијању резултата о неанулирању  $L$ -функција у многим фамилијама.

У другој глави приказани су основни појмови аритметике функцијских поља. Дате су дефиниције и приказана најважнија својства аритметичких објеката који се појављују у даљем излагању. Поред тога, приказани су корисни технички резултати у виду апроксимативне функционалне једначине за квадратне Дирихлеове  $L$ -функције и Пуасонове формуле сумације.

Трећа глава посвећена је аритметици елиптичких кривих над функцијским пољима. Приказана је дефиниција квадратног твиста елиптичке криве, као и конструкција  $L$ -функције придружене некој елиптичкој кривој (или њеном твисту).

Четврта глава бави се питањима момената и неанулирања  $L$ -функција над функцијским пољима. Приказана је хипотеза Андрадеа и Китинга о моментима квадратних Дирихлеових  $L$ -функција и скорашњи Флоренини резултати израчунавања тих момената закључно са четвртим. Поред резултата за ту фамилију, приказани су и недавни резултати Буија, Флорее, Китинга и Родити-Гершон о моментима и неанулирању за фамилију  $L$ -функција квадратних твистова неке фиксиране елиптичке криве.

У петој глави приказани су оригинални резултати израчунавања првог мешовитог момента за  $L$ -функције квадратних твистова неке елиптичке криве (и њихових извода) и квадратних Дирихлеових  $L$ -функција. Кључно за добијање тих резултата је одређивање асимптотике, када  $g \rightarrow \infty$ , за суму

$$\mathcal{S}_E(N, X, Y, \alpha) = \sum_{D \in \mathcal{H}_{2g+1}^*} \sum_{\substack{f \in \mathcal{M}_{\leq X} \\ h \in \mathcal{M}_{\leq Y}}} \frac{\lambda(f) \chi_D(Nfh)}{|f|^{1/2+\alpha} |h|^{1/2}},$$

где су  $\lambda(f)$  коефицијенти  $L$ -функције придружене елиптичкој кривој  $E$ ,  $\mathcal{M}_k$  означава за скуп свих моничних полинома из  $\mathbb{F}_q[t]$  степена највише  $k$ ,  $N \in \mathcal{M}$  је полином чији сви прости фактори деле дискриминанту  $\Delta$  елиптичке криве  $E$ , а  $X, Y > 0$  и  $\alpha \in \mathbb{C}$  су параметри који се касније погодном одаберу. Након примене формуле Пуасонове сумације, из те суме је могуће издвојити и израчунати главни члан, а затим и ограничити допринос преосталих чланова. Поменуто је у дисертацији

урађено применама Перонове формуле и израчунавањем, односно оцењивањем контурних интеграла који се појављују након таквих примена. Конкретно је добијено да, када  $g \rightarrow \infty$ , за свако  $\varepsilon > 0$  важи

$$\frac{1}{|\mathcal{H}_{2g+1}^*|} \sum_{D \in \mathcal{H}_{2g+1}^*} L\left(\frac{1}{2}, E \otimes \chi_D\right) L\left(\frac{1}{2}, \chi_D\right) = P_1(g) + O\left(q^{-\frac{g}{2} + \varepsilon g}\right)$$

и

$$\frac{1}{|\mathcal{H}_{2g+1}^*|} \sum_{D \in \mathcal{H}_{2g+1}^*} \varepsilon_E^-(D) L'\left(\frac{1}{2}, E \otimes \chi_D\right) L\left(\frac{1}{2}, \chi_D\right) = P_2(g) + O\left(q^{-\frac{g}{2} + \varepsilon g}\right),$$

где су  $P_1$  и  $P_2$  редом полиноми степена 1, односно 2, чији су коефицијенти експлицитно описани. Затим су на основу та два резултата изведени и одговарајући резултати о неанулирању.

Шеста глава посвећена је хипотезама о количницима  $L$ -функција. Приказан је модел Конрија, Фармера и Цирнбауера који се може искористити за формулисање тих хипотеза у различитим фамилијама  $L$ -функција. Обухваћене су и примене хипотеза о количницима на добијање класичних резултата о тзв. „густини нивоа један“ нула квадратних Дирихлеових  $L$ -функција, израчунавању другог момента извода Риманове зета функције и молификованог другог момента Риманове зета функције. У последњем делу главе дат је осврт на познате резултате везане за хипотезе о количницима над функцијским пољима.

У седмој и последњој глави дат је оригиналан резултат добијања асимптотске формуле, кад  $g \rightarrow \infty$ , за

$$\frac{1}{|\mathcal{H}_{2g+1}^*|} \sum_{D \in \mathcal{H}_{2g+1}^*} \frac{L\left(\frac{1}{2} + \alpha, E \otimes \chi_D\right)}{L\left(\frac{1}{2} + \beta, \chi_D\right)},$$

при чему параметри  $\alpha$  и  $\beta$  испуњавају услове  $|\alpha| \ll \frac{1}{g}$  и  $0 < \Re(\beta) < \frac{1}{2}$ . Поменута формула добијена је комбинацијом познатог резултата о асимптотици негативних момената квадратних Дирихлеових  $L$ -функција над функцијским пољима са новим резултатом одређивања асимптотике за

$$\frac{1}{|\mathcal{H}_{2g+1}^*|} \sum_{D \in \mathcal{H}_{2g+1}^*} L\left(\frac{1}{2} + \alpha, E \otimes \chi_D\right) \chi_D(h),$$

где је  $h \in \mathcal{M}$  монични полином такав да је  $\mathbf{d}(h) \ll g$ , који је добијен техникама налик на оне које су примењене у петој глави.

## 7. Закључак

Дисертација „Истовремено неанулирање  $L$ -функција квадратних твистова елиптичке криве и квадратних Дирихлеових  $L$ -функција над функцијским пољима“ се бави важним проблемом неанулирања централних вредности  $L$ -функција придружених елиптичким кривама и квадратним Дирихлеовим карактерима над функцијским пољима. Теза је написана уредно, са јасним и систематичним објашњењима и детаљним доказима, а кандидат је проучио и обимну литературу у области.

Никола Лелас је до сада објавио четири рада у часописима са SCI листе, од тога један самосталан. На основу свега наведеног, како су испуњени и сви формални услови, предлажемо да се рукопис „Истовремено неанулирање  $L$ -функција квадратних твистова елиптичке криве и квадратних Дирихлеових  $L$ -функција над функцијским пољима“ **прихвати** као докторска дисертација из математике и да се закаже његова јавна одбрана.

У Београду, 16. новембра, 2022.

## ЧЛАНОВИ КОМИСИЈЕ

---

проф. др Александар Липковски, редовни професор  
Универзитет у Београду- Математички факултет

---

проф. др Горан Ђанковић, ванредни професор (ментор)  
Универзитет у Београду- Математички факултет

---

проф. др Марко Радовановић, ванредни професор  
Универзитет у Београду- Математички факултет

---

проф. др Драган Станков, ванредни професор,  
Универзитет у Београду- Рударско-геолошки факултет факултет