Универзитет у Београду - Математички факултет
Наставно - научном већу

Извештај Комисије за оцену докторске дисертације кандидата Марека Светлика

Одлуком Наставно-научног већа Математичког факултета Универзитета у Београду, донетој на седници одржаној 29. маја 2020. године, именовани смо за чланове Комисије за оцену докторске дисертације **„Оцене Шварц-Пиковог типа за хармонијска пресликавања и хиперболичка метрика"** кандидата Марека Светлика. Након прегледања дисертације, Комисија подноси Наставно-научном већу Математичког факултета Универзитета у Београду следећи извештај.

1. Основни подаци о кандидату и дисертацији

Основни подаци о кандидату:
Марек Светлик рођен је 25.10.1983. године у Београду. Математички факултет (смер Теоријска математика и примене) завршио је 5. септембра 2007. године са просечном оценом 10,00, као студент генерације. Докторске студије на Математичком факултету (смер Анализа) уписао је децембра 2007. године. На докторским студијама положио је следеће предмете: Анализа 4, Комплексна анализа 2, Хардијеви простори, Квазиконформна и хармонијска пресликавања, Анализа на многострукостима и Специјални курс - Геометријска теорија функција 2 (све са оценом 10) и остварио 150/180 ЕСПБ. Године 2017. поново је уписао докторске студије на Математичком факултету Универзитета у Београду, студијски програм Математика.

Запослен је на Математичком факултету од октобра 2007. године, најпре као сарадник у настави, а затим као асистент. До сада је држао вежбе из следећих предмета: Комплексне функције, Дистрибуције и парцијалне једначине А, Дистрибуције и парцијалне једначине Б, Једначине математичке физике, Парцијалне једначине, Одабрана поглавља комплексне анализе, Пракса наставе математике и рачунарства, Школска пракса, Математика 1, Математика 2, Математика 3 и Математика 4.

Наслов дисертације: Оцене Шварц-Пиковог типа за хармонијска пресликавања и хиперболичка метрика

Обим дисертације и библиографија: Дисертација има x+112 страна и 3 прилога (изјава о ауторству, изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада и изјава о коришћењу). Главни део дисертације састоји се од увода и пет глава. У литератури је наведена 81 референца.

2. Предмет и циљ дисертације

Предмет дисертације јесте проучавање уопштења Шварцове леме и неједнакости Шварц-Пиковог типа за хармонијска пресликавања и хармонијска квазирегуларна пресликавања, дефинисана на јединичном диску и хиперболичким доменима у $\mathbb{C}$. У дисертацији су разматране одговарајуће оцене таквих пресликавања f за дато $f(0)$ (при чему, за разлику од класичног случаја, не мора бити $f(0) = 0$), као и за дату вредност норме диференцијала пресликавања f у тачки $z = 0$. Како је за изучавање наведених неједнакости изузетно погодна хиперболичка метрика, посебна пажња посвећена је вези геометријске теорије функција и хиперболичке метрике.

Циљ дисертације јесте систематско приказивање резултата до којих је кандидат дошао самостално или са коауторима, као и резултата који се могу наћи у литератури, а односе се на генерализације Шварцове леме и оцене Шварц-Пиковог типа за хармонијска, односно хармонијска квазирегуларна пресликавања. Такође, циљ дисертације јесте приказ метода који дају елегантне доказе неких савремених резултата у геометријској теорији функција.

3. Основне хипотезе од којих се полазило у истраживању

Свака реално-вредносна хармонијска функција, дефинисана на просто повезаној области у комплексној равни, јесте реални део неке холоморфне функције. При том модул градијента те хармонијске функције једнак је модулу извода одговарајуће холоморфне функције. Такође, ако вредности хармонијске функције припадају интервалу $(-1, 1)$, односно интервалу $(0, +\infty)$, онда вредности одговарајуће холоморфне функције припадају вертикалном појасу $\mathbb{S} = \{z \in \mathbb{C} : -1 < \operatorname{Re} z < 1\}$, односно десној полуравни $\mathbb{K} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$.

Холоморфне функције не повећавају хиперболичко растојање и за неке области могуће је експлицитно одредити хиперболичку метрику. Посебно је значајно то што хиперболичка метрика вертикалног појаса $\mathbb{S}$, односно десне полуравни $\mathbb{K}$, у датој тачки z зависи само од $\operatorname{Re} z$, а постоји и једноставна веза еуклидског и хиперболичког растојања на вертикалном појасу $\mathbb{S}$. Коришћење наведених резултата може се назвати метод појаса и полуравни (енг. *strip and half-plane method*). Како су позната профињења Шварцове и Шварц-Пикове леме за холоморфне функције, коришћењем метода појаса и полуравни може се доћи до одговарајућих тврђења најпре за реално-вредносне, а затим и за комплексно-вредносне хармонијске функције и посебно за хармонијска квазирегуларна пресликавања.

4. Кратак опис садржаја дисертације

Садржај дисертације подељен је у 5 глава.

У глави 1 дефинисани су основни појмови и уведене су одговарајуће ознаке. Ради комплетности дате су и дефиниције хармонијског, квазирегуларног и квазиконформног пресликавања, наведена су њихова основна својства, као и неколико примера и тврђења. При томе, наведена су само она тврђења која се непосредно користе у наставку дисертације.

У глави 2 приказана су геометријска својства холоморфних функција, која су последице Шварцове леме и изведена су разна уопштења Шварцове леме. Доказана је и Шварц-Пикова лема и уведени су појмови хиперболичког домена у $\mathbb{C}$, хиперболичке метрике, хиперболичке дужине криве и хиперболичког растојања, уз доказе одговарајућих тврђења. Дата је дефиниција хиперболичког извода и наведена су тврђења која се односе на еуклидска својства хиперболичких дискова и конформне изоморфизме, а која су коришћена у глави 3. На крају, детаљно је обрађен појам Гаусове кривине и доказане су Алфорсова лема и супротна верзија Алфорсове леме, које имају кључну улогу у доказу тврђења датих у глави 4.

У глави 3 наведена је класична Шварцова лема за хармонијска пресликавања, као и уопштења тог тврђења која су објављена у заједничком раду кандидата са ментором М. Матељевићем [MS] или у самосталном раду кандидата [S]. Осим тога, наведене су и верзије Шварц-Пикове леме за хармонијска пресликавања. Та тврђења формулисана су и у терминима оцене норме диференцијала, односно градијента одговарајућег пресликавања, и у терминима одговарајућих хиперболичких растојања. У приказаним доказима коришћен је метод појаса и полуравни који је развијен у раду M. Mateljević, *Schwarz lemma and Kobayashi metrics for harmonic and holomorphic functions*, J. Math. Anal. Appl. 464 (2018), pp. 78-100. тиме су систематизовани и на једноставнији начин доказани резултати до којих су дошли Ф. Колона, Д. Калај и М. Вуоринен, Х. Х. Чен и М. Марковић. На крају ове главе дат и доказ Харнакових неједнакости за хармонијска пресликавања, као и доказ њихових уопштења, коришћењем метода доказивања аналогним оним које су коришћене у доказивању уопштења Шварцове леме за хармонијска пресликавања.

У глави 4 најпре су доказана још нека својства хиперболичке метрике која су касније коришћена за добијање верзија Шварц-Пикове леме за хармонијска квазирегуларна пресликавања у терминима хиперболичког растојања. Затим, доказане су одговарајуће верзије Шварц-Пикове леме за хармонијска квазирегуларна пресликавања хиперболичког домена у конвексан хиперболички домен у терминима оцене норме њихових диференцијала. При томе, ако је кодомен појас или полураван дат је веома једноставан доказ одговарајућих тврђења, који се заснива на методу појаса и полуравни. Дат је и одговарајући контрапример у случају да кодомен није конвексан хиперболички домен. Осим тога, доказана је и верзија Шварцове леме за хармонијска квазирегуларна пресликавања јединичног диска у појас. На крају, показано је и да су хармонијска квазиконформна пресликавања квази-изометрије хиперболичког домена и конвексног хиперболичког домена.

У глави 5 најпре је, ради комплетности, наведена дефиниција апсолутне равни и приказана су два добро позната модела те равни. Затим, полазећи од одговарајуће теореме симултано су изведене формуле за израчунавање растојања између две тачке у оба од тих модела. Током тог извођења, природно се појављују неке функционалне једначине за које је добијано неколико интересантних тврђења. На крају, апроксимирањем одговарајуће криве хиперболичком полигоналном линијом, добијена је формула за израчунавање хиперболичке дужине те криве.

5. Остварени резултати и научни допринос дисертације

Хармонијска пресликавања могу се посматрати као уопштења холоморфних пресликавања. Свако холоморфно пресликавање јесте и хармонијско, а за хармонијска пресликавања важе многа аналогна или иста тврђења као и за холоморфна. На пример, као и за холоморфна пресликавања тако и за хармонијска пресликавања важе принцип максимума модула, Лиувилова теорема, теорема о отклоњивом сингуларитету, итд. Између осталог, постоји и верзија Шварцове леме за хармонијска пресликавања. Прецизније, важи следеће тврђење.

Теорема 1. *Нека је $f : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ хармонијско пресликавање такво да је $f(0) = 0$. Тада за свако $z \in \mathbb{U}$ важи*

$$|f(z)| \leqslant \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} |z|. \tag{1}$$

Како је композиција холоморфних пресликавања холоморфно пресликавање, следи да за свако холоморфно пресликавање $f : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ и конформни аутоморфизам $\varphi_{-f(0)}$ (за $a \in \mathbb{C}$, такво да је $|a| < 1$, пресликавање $\varphi_a : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ дефинисано је са $\varphi_a(z) = \dfrac{z+a}{1+\overline{a}z}$) важи да је пресликавање $\varphi_{-f(0)} \circ f : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$, такође холоморфно пресликавање, као и да је $(\varphi_{-f(0)} \circ f)(0) = 0$. Стога, једноставно се формулише и доказује верзија Шварцове леме за холоморфна пресликавања без претпоставке да одговарајуће пресликавање фиксира тачку 0. С друге стране, ако је $f : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ хармонијско пресликавање, онда пресликавање $\varphi_{-f(0)} \circ f$ не мора бити хармонијско и то представља одређену потешкоћу за добијање верзије Шварцове леме за хармонијска пресликавања, без претпоставке да одговарајуће пресликавање фиксира тачку 0. У заједничком раду кандидата са ментором М. Матељевићем [MS], показано је како се те тешкоће могу превазићи и доказано је следеће тврђење.

Теорема 2. *Нека је $u : \mathbb{U} \to (-1, 1)$ хармонијско пресликавање такво да је $u(0) = b$ и нека је $a = \operatorname{tg} \dfrac{b\pi}{4}$ и φ_a одговарајући конформни аутоморфизам јединичног диска. Тада за свако $z \in \mathbb{U}$ важи*

$$\frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{a - |z|}{1 - a|z|} \leqslant u(z) \leqslant \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{a + |z|}{1 + a|z|},$$

односно, другачије записано

$$\frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \varphi_a(-|z|) \leqslant u(z) \leqslant \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \varphi_a(|z|). \tag{2}$$

Такође, показано је и да су неједнакости (2) оштре, а као последица може се добити и одговарајуће тврђење за комплексно-вредносна хармонијска пресликавања. Наведени резултати детаљно су приказани у дисертацији.

Даље, А. Ф. Бирдон и Т. Карне (A. F. Beardon and T. K. Carne, *A strengthening of the Schwarz-Pick Inequality*, Amer. Math. Monthly 99 (1992), pp. 216-217.) добили су следеће интересантно побољшање Шварц-Пикове неједнакости.

Теорема 3. *Нека су Ω_1 и Ω_2 хиперболички домени и $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ холоморфно пресликавање. Тада за свако $z, w \in \Omega_1$ важи*

$$d_{\Omega_2}(f(z), f(w)) \leqslant \log(\cosh d_{\Omega_1}(z,w) + |f^h(w)| \sinh d_{\Omega_1}(z,w)),$$

при чему су d_{Ω_1} и d_{Ω_2} хиперболичка растојања на Ω_1 и Ω_2, а $f^h(w)$ хиперболички извод функције f у тачки w.

Коришћењем теореме 3 кандидат је доказао следећу теорему која се односи на холоморфна пресликавања и која представља уопштење пропозиције 2.2.2 из S. G. Krantz, *Geometric Function Theory*, Birkhäuser, 2006, као и леме 2 из R. Osserman. *A sharp Schwarz inequality on the boundary*, Proc. Amer. Math. Soc. 128 (2000), pp. 3513-3517.

Теорема 4. *Нека је $f : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ холоморфно пресликавање такво да је $|f(0)| = a$ и $|f'(0)| = d$, при чему је $d \leqslant 1 - a^2$ и нека је $c = \dfrac{d}{1-a^2}$. Тада за свако $z \in \mathbb{U}$ важи*

$$|f(z)| \leqslant \varphi_a\big(|z|\varphi_c(|z|)\big). \tag{3}$$

Осим тога, коришћењем исте теореме, кандидат је у самосталном раду [S] добио и наредна два тврђења која представљају одговарајуће верзије теореме 4 за хармонијска пресликавања. Штавише, теорема 5 представља уопштење теореме 2, а теорема 6 представља уопштење теореме 1.

Теорема 5. *Нека је* $u : \mathbb{U} \to (-1, 1)$ *хармонијско пресликавање такво да је* $u(0) = b$ *и* $|\nabla u(0)| = d$, *при чему је* $d \leqslant \frac{4}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}b\right)$ *и нека су* $a = \operatorname{tg}\frac{b\pi}{4}$ *и* $c = \frac{\pi}{4}\frac{1}{\cos\frac{\pi}{2}b}d$. *Тада за свако* $z \in \mathbb{U}$ *важи*

$$\frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\varphi_a\big(-|z|\varphi_c(|z|)\big) \leqslant u(z) \leqslant \frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\varphi_a\big(|z|\varphi_c(|z|)\big). \tag{4}$$

При томе, ако је $c = 1$, *онда се неједнакости (4) своде на неједнакости (2).*

Теорема 6. *Нека је* $f : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ *хармонијско пресликавање такво да је* $f(0) = 0$ *и* $\|df(0)\| = d$, *при чему је* $d \leqslant \frac{4}{\pi}$ *и нека је* $c = \frac{\pi}{4}d$. *Тада за свако* $z \in \mathbb{U}$ *важи*

$$|f(z)| \leqslant \frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}\big(|z|\varphi_c(|z|)\big). \tag{5}$$

При томе, ако је $c = 1$, *онда се неједнакост (5) своди на неједнакост (1).*

Свака од неједнакости формулисаних у теоремама 4, 5 и 6 јесте оштра, а неједнакости које треба да задовољи константа d у тим теоремама јесу природне. Наиме, неједнакости које треба да задовољи константа d директно следе из Шварц-Пикове неједнакости за холоморфна пресликавања, односно из верзије Шварц-Пикове леме за реално-вредносна хармонијска пресликавања која је директна последица метода појаса и полуравни. Сви ови резултати детаљно су приказани у дисертацији.

За холоморфна пресликавања која пресликавају јединични диск $\mathbb{U}$ у вертикални појас $\mathbb{S}$, при чему је $\mathbb{S} = \{z \in \mathbb{C} : -1 < \operatorname{Re} z < 1\}$, важи следећа верзија Шварцове леме.

Теорема 7. *Нека је* $f : \mathbb{U} \to \mathbb{S}$ *холоморфно пресликавање такво да је* $f(0) = 0$. *Тада за свако* $z \in \mathbb{U}$ *важи*

$$|f(z)| \leqslant \frac{4}{\pi}\operatorname{artanh}|z|. \tag{6}$$

Одговарајуће уопштење за хармонијска квазирегуларна пресликавања које су добили кандидат и М. Матељевић у раду [MS], такође је приказано у овој дисертацији. У питању је следећа теорема.

Теорема 8. *Нека је* $K \geqslant 1$ *и* $f \in \mathrm{HQR}_K(\mathbb{U}, \mathbb{S})$ *такво да важи* $f(0) = 0$. *Тада за свако* $z \in \mathbb{U}$ *важи*

$$|f(z)| \leqslant \frac{4}{\pi}K\operatorname{artanh}|z|. \tag{7}$$

Напоменимо да су неједнакости (6) и (7) оштре, као и да се за $K = 1$ неједнакост (7) своди на неједнакост (6).

На крају кандидат представља резултате рада [MKS]. Прецизније, полазећи од теореме која се односи на егзистенцију и јединственост (до на јединицу мере) растојања d_{a} у апсолутној равни, таквог да је $d_{\mathrm{a}}(a, b) = d_{\mathrm{a}}(c, d)$ ако и само ако је пар тачака (a, b) подударан са паром тачака (c, d), односно $d_{\mathrm{a}}(a, c) = d_{\mathrm{a}}(a, b) + d_{\mathrm{a}}(b, c)$ ако и само ако је тачка b између тачака a и c, као и интерпретације основних геометријских појмова и релација у Поенкареовом диск моделу, кандидат показује да је хиперболичко растојање d_h на $\mathbb{U}$ дато са

$$d_h(z_1, z_2) = \log\frac{1 + \left|\dfrac{z_2 - z_1}{1 - \overline{z_1}z_2}\right|}{1 - \left|\dfrac{z_2 - z_1}{1 - \overline{z_1}z_2}\right|},\ z_1, z_2 \in \mathbb{U}. \tag{8}$$

Осим тога, представљани су и резултати рукописа [KS] у ком је полазећи од једнакости (8) дефинисана хиперболичка дужина C^1 криве $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{U}$ као супремум хиперболичких дужина одговарајућих уписаних полигоналних линија, тј. као

$$\sup\sum_{i=1}^{n} d_h(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)),$$

при чему се супремум узима по свим поделама $P: 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ интервала $[0,1]$. За тако дефинисану хиперболичку дужину C^1 криве $\gamma : [0,1] \to \mathbb{U}$ показано је да важи

$$\sup \sum_{i=1}^{n} d(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)) = \int_0^1 \frac{2|\gamma'(t)|}{1-|\gamma(t)|^2} dt = \int_\gamma \frac{2}{1-|z|^2}|dz|,$$

при чему се супремум узима по свим поделама $P: 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ интервала $[0,1]$.

6. Објављени и саопштени резултати који чине део докторске дисертације

Објављени радови који су у вези са темом дисертације:

[MS] M. Mateljević, M. Svetlik, *Hyperbolic Metric on the Strip and the Schwarz Lemma for HQR Mappings*, Appl. Anal. Discrete Math. 14 (2020), 150-168.
DOI 10.2298/AADM200104001M
ISSN 1452-8630 (Print) ISSN 2406-100X (Online)
Impakt faktor (2018): 0.967

[MKS] M. Mateljević, M. Knežević, M. Svetlik, *Distance in the Absolute Plane and Cauchy Functional Equations*, Filomat 31:11 (2017), 3585-3592.
DOI 10.2298/FIL1711585M
ISSN 0354-5180 (Print) ISSN 2406-0933 (Online)
Impakt faktor (2017): 0.635

[S] M. Svetlik, *A Note on the Schwarz Lemma for Harmonic Functions*, accepted for publication in Filomat.
ISSN 0354-5180 (Print) ISSN 2406-0933 (Online)
Impakt faktor (2018): 0.789

[KS] M. Knežević, M. Svetlik, *From the hyperbolic distance to the hyperbolic length*, manuscript.

Саопштења на конференцијама која су у вези са темом дисертације:

1. M. Knežević, M. Svetlik, *On hyperbolic type metrics related problems*, V simpozijum „Matematika i primene", Matematički fakultet Univerziteta u Beogradu i SANU, Beograd 17-18. oktobar 2014.

2. M. Knežević, M. Mateljević, M. Svetlik, *A note on hyperbolic length and distance*, Peta matematička konferencija Republike Srpske, Trebinje, 5 - 6. jun 2015.

3. M. Mateljević, M. Svetlik, *The Schwarz lemma and hyperbolic metric on the strip*, IX simpozijum „Matematika i primene", Matematički fakultet Univerziteta u Beogradu, Beograd 30. novembar - 1. decembar 2018.

4. M. Knežević, M. Mateljević, M. Svetlik, *Schwarz-Pick type estimates for harmonic, HQR and HQC mappings*, X simpozijum „Matematika i primene", Matematički fakultet Univerziteta u Beogradu, Beograd 6-7. decembar 2019.

7. Закључак

Предмет докторске дисертације кандидата Марека Светлика јесте савремена и популарна област која је део геометријске теорије функција. Кандидат је проучио обимну литературу, а резултати до којих је дошао су оригинални и нетривијални. Добијене су многе оштре оцене Шварц-Пиковог типа за хармонијска пресликавања, при чему су нађена и одговарајућа екстремална пресликавања. Део резултата је публикован у три рада који су објављени у часописима са СЦИ листе. Један од тих радова јесте самостални рад кандидата, а два су коауторска. Истичемо и да су резултати педантно и систематично приказани, као и да дисертација може бити користан материјал за истраживаче који желе да се упознају са овом облашћу. Комисија констатује да је дисертација урађена према одобреној пријави и да је у питању оригинално и самостално научно дело. Стога, имајући у виду претходно изложено, са задовољством предлажемо Наставно-научном већу Математичког факултета да прихвати извештај комисије за оцену докторске дисертације кандидата Марека Светлика и одреди комисију за њену јавну одбрану.

У Београду,
1.6.2020.

Председник комисије:

____
др Миљан Кнежевић,
доцент Математичког факултета

Чланови комисије:

____
проф. др МилошАрсеновић,
редовни професор Математичког факултета

____
др Владимир Божин,
доцент Математичког факултета

____
др Борислав Гајић,
виши научни сарадник, Математички институт САНУ