Наставно-научном већу
Математичког факултета
Универзитета у Београду

На седници Наставно-научног већа Математичког факултета одржаној 11 септембра 2015 године, одређени смо у комисију за преглед и оцену докторске дисертације,

Примена Гребнерових база
на проблеме поплочавања

магистра математичких наука, **Мануеле Музика Диздаревић**. Комисија је поднешену дисертацију пажљиво прегледала и након консултација подноси Већу следећи,

ИЗВЕШТАЈ

1. Кратка научна биографија

Мануела Музика Диздаревић је рођена 30. 09. 1975 у Сарајеву. Дипломирала је 2001 године на Природно-математичком факултету у Сарајеву (Одсек математика). Дипломски рад са темом *Линеарне репрезентације коначних група* урађен је под менторством проф. др. Мирјане Вуковић.

Магистарски рад под насловом *Дивизори на торусним варијететима* урађен је 2010 године под менторством проф. др. Александра Липковског на Математичком факултету у Београду. Исте године уписала је докторске студије (смер алгебра) на Математичком факултету у Београду.

Запослена је од 2001 године на Одсјеку за математику Природно-математичког факултета у Сарајеву (у звању виши асистент (област Алгебра) од 2011 године).

2. Публиковани научни радови и радови прихваћени за штампу

1. M. Muzika Dizdarević, R.T. Živaljević,
Symmetric polyomino tilings, tribones, ideals and Groebner bases,
Publications de l'Institut Mathématique, 98 (112), 2015, 1–23.
arXiv:1407.2015[math.CO]

2. M. Muzika Dizdarević, M. Timotijević, R.T. Živaljević,
Signed polyomino tilings by n-in-line polyominoes and Groebner bases,
Publications de l'Institut Mathématique, 99 (113), 2016, 31–42.
arXiv:1409.2745[math.CO]

3. M. Muzika Dizdarević, Symmetric tilings in the square lattice
(рад је прихваћен за штампу у журналу *Matematički vesnik*).

3. Област докторске дисертације

Шире области дисертације су алгебра и комбинаторика. Ужа област је рачунарска комутативна алгебра (теорија Гребнерових база) са применама на комбинаторику полиомино поплочавања.

Полиомино поплочавања се убрајају у централне теме комбинаторике и дискретне (комбинаторне) геометрије. Индивидуални полиомино (n-омино) се може дефинисати као коначни, повезани граф у целобројној решетки. Основни проблем је одређивање услова када се задани полиомино може покрити са неколико копија базних полиомина. Полиомино поплочавања се природно везују за комбинаторику и дискретну математика са врло интересатним и многобројним применама у физици, биологији и рачунарству.[1] Захваљујући популарним чланцима Соломона Голомба и Мартина Гарднера, полиомино поплочавања спадају и у најпопуларније теме елементарне математике.

Међу математичарима који су примењивали алгебарске методе у теорији полиомино поплочавања, а који су инспирисали аутора у њеном избору истраживачке теме, су Џон Конвеј и Џеф Лагариас, Мајкл Реид, као и Оливие Бодини и Б. Ноувел.

Конвеј, Лагариас и Реид су развили метод "хомолошких група полиомино поплочавања" (tile homology groups), као технику за изучавање тежинских полиомино поплочавања (поплочавања у којима се полиомино елементи могу рачунати са позитивном и негативном вишеструкошћу).

Бодини и Ноувел су увели у игру комутативну алгебру и теорију Гребнерових база када су уочили да се хомолошке групе полиомино поплочавања могу природно интерпретирати као модули над полиномиалним прстеном $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$.

Теорија Гребнерових база идеала у полиномиалним прстеновима једна је од фундаменталних теорија са најширом применом у рачунарству (на

---

[1] S.W. Golomb, D.A. Klarner, Polyominoes, chapter 15 in *Handbook of Discrete and Computational Geometry* (second edition), Chapmen and Hall 2004.

пример у програмима за симболичко израчунавање). Сви велики програмски пакети (*Mathematica, Maple*, и др.) подржавају израчунавање Гребнерових база и других асоцираних процедура, што ову технику чини врло приступачном и примењивом на најширу класу проблема теоретског и практичног карактера.

4. Приказ дисертације са акцентом на оригиналним доприносима

Дисертација има $85 + 9$ страна текста и 20 слика. Списак литературе се састоји од 28 библиографских јединица. Поред увода и библиографије, дисертација има пет глава.

Главе 1 и 2 (*Гребнерове базе* и *Решетке и поплочавања*) су прегледног карактера. У њима је излажен материјал везан за наведене области у обиму неопходном за читање централних глава тезе.

Главе 3, 4 и 5, које садрже оригиналне доприносе, базирају се на три научна рада (референце [19], [20] и [21]) који су већ публиковани или прихваћени за штампу. Рад [19] је урађен самостално, док су преостала два коауторска.

Акцент у дисертацији је на поплочавањима са допунским симетријама и њима су посвећене главе 3 и 4. У глави 3 се разматра случај раванских полиомино поплочавања симетричних у односу на координатни почетак а у глави 4 поплочавања са ротационом симетријом реда 3. Може се рећи да ове две главе, по својој оригиналности и техничкој сложености примењених метода, чине главни део дисертације. С друге стране глава 5 није мање занимљива с обзиром да се у њој, такође методама базираним на теорији Гребнерових база, добијају интересатна попштења резултата које су добили познати амерички математичари Џон Конвеј (John Conway) и Џеф Лагариас (Jeff Lagarias).

У глави 1 је изложен стандардни материјал везан за терију Гребнерових база у идеалима полиномијалних прстенова. С обзиром да примене у полиомино поплочавањима захтевају рад са целим коефицијентима, акцент је на полиномиалним прстеновима са коефицијентима у *еуглидским прстеновима*. Експозиција у великој мери следи метод изложен у чланку, D. Lichtblau. Revisiting strong Gröbner bases over Euclidean domains, *Wolfram Library Archive*, `http://library.wolfram.com/infocenter/MathSource/7522`.

Глава 2 даје приказ основних појмова теорије полиомино поплочавања у квадратним и шестоугаоним решеткама са акцентом на тежинским или $\mathbb{Z}$-поплочавањима. Поглавље 2.4 је увод у главну тему дисертације (тежинска поплочавања са додатним симетријама).

Централни нов резултат у глави 3 је Теорема 5.7. У овој теореми се разматра проблем тежинског или $\mathbb{Z}$-поплочавања фигуре S_n у (квадратној) целобројној решетки, која има облик ромба стране n. Фигура S_n је централно симетрична (из ње је избачен центар симетрије). Основни проблем је одређивање када S_n допушта централно симетрично тежинско поплочавање *триминама* или *трибонима*, тј. плочицама добијеним постављањем три квадрата целобројне решетке у истој линији. Теорема 5.7 тврди да је такво поплочавање могуће само за ромбове одређених страна, тачније ако је n конгруентно са 1 по модулу 3.

Напомињемо да је проблем поплочавања трибонима мотивисан резултатима које је за таква поплочавања троугаоних облика добио William Thurston у чланку *Conway's tiling groups* (референца [28]).

Метод којим је добијена Теорема 5.7 је исто тако интересантан као и сам резултат и заслужује нешто детаљнији приказ.

Основни амбиент за тежинска полиомино поплочавања у квадратној решетки је слободна абелова група $P(A) = Abel(\mathbb{Z}^2)$, генерисана елементарним квадратима решетке $\mathbb{Z}^2$. Сагласно основној идеји Бодинија и Ноувела, ова група се интерпретира као P-модул, где је $P = \mathbb{Z}[x, y, u, v]/\langle xu - 1, yv - 1\rangle$ прстен Лоранових полинома у две варијабле (интепретиран као фактор прстен полиномијалног прстена).

Главни кораци у примени метода (и у доказу Теореме 5.7) су следећи.

(1) Централна симетрија генерише цикличну групу $G = \mathbb{Z}_2$ која делује на прстену P. Први корак је идентификација прстена P^G, G-инвариантних полинома (елемената у P). Ово је урађено у Поглављу 3.1 (Теорема 1.3 на страни 39).

(2) Следећи корак је идентификација абелове групе $P(A)^G \subset P(A)$, као модула над прстеном P^G, као и одеређивање P^G-подмодула $P(\mathcal{T})^G \subset P(A)^G$ свих G-симетричних полиомина генерисаних трибонима. Ово је урађено у Поглављу 3.2 (главна је Теорема 2.5.).

(3) Проблем симетричог поплочавања се своди на "submodule membership problem" из теорије Гребнерових база, а онда (проширивањем прстена P до $\overline{P}$), на "ideal membership problem" (Поглавља 3.3 и 3.4).

(4) Полиомино S_n је идентификован као елемент прстена $P(A)^G$ у Поглављу 3.5 (Пропозиције 5.5 и 5.6).

Многе калкулације су релативно сложене и ослањају се на примену програма *Mathematica 9*. Интересантно је уочити скок у сложености полиомино проблема до којег је дошло због захтева за додатном (централном) симетријом.

Централни резултати у Глави 4 су Теореме 6.1 и 6.6 у којима се анализира могућност поплочавања трибонима правилног троугла T_N стране N (у хексагоналној решетки), инваријатна у односу на ротацију од 120°. На пример у Теореми 6.1 се доказује да се троугао T_{3k-1} може ротационо симетрично, $\mathbb{Z}$-поплочати трибонима, ако и само ако је $k = 9r$ за неки природан број r. Први такав троугао има страну 26. Калкулације следе исту схему (1)–(4) као и у Глави 4, с том разликом да су рачуни још сложенији, што је повезано са већом групом симетрије.

Глава 5, иако технички нешто мање сложена од претходних глава, веома је интересатна због добијеног резултата који генералишу познате резултате Конвеја и Лагаријаса из рада [8]. Главни резултат главе је Теорема 2.4 која тврди да троугони регион T_m у хексагоналној решетки допушта (не обавезно симетрично) поплочавање *n-бонима* (n-bon = n-u-vrsti poliomino), ако и само ако је остатак дељања броја m са n^2 или 1 или 2. Специјално за $n = 3$ добија се резултат Конвеја и Лагаријаса. Поред главног резултата веома је занимљива и Теорема 1.4 у којој је директном применом Бухбергеровог алгоритма одређена Гребнерова база идеала I_n генерисаног n-бонима.

5. Закључак

Докторска дисертација „*Примена Гребнерових база на проблеме поплочавања*“ је врло леп и садржајан прилог теорији тежинских полиомино поплочавања. По свом карактеру дисертација је мултидисциплинарна, са акцентом на алгебри (теорија модула и идеала, теорија инваријаната), комбинаторици (полиомино поплочавања) и рачунарству (теорија Гребнерових база). Резултати су нови и занимљиви ширем кругу научника свих наведених специјалности.

Аутор дисертације мр Мануела Музика Диздаревић је показала завидно математичко знање из неколико различитих области, као и способност за самостални научни рад.

Дисертација се може убројити у пионирске подухвате у домену примене Гребнерових база на полиомино поплочавања у равни, посебно увођењем нових идеја и процедура за анализу поплочавања са додатним симетријама.

Са задовољством предлажемо Научно-наставном већу Математичког факултета Универзитета у Београду да прихвати овај рад као докторску дисертацију и одреди комисију за њену јавну одбрану.

др Раде Живаљевић (ментор)
редовни професор
Математички институт САНУ

др Синиша Врећица
редовни професор
Математички факултет Београд

др Александар Липковски
редовни професор
Математички факултет Београд

др Зоран Петровић
ванредни професор
Математички факултет Београд

др Бранислав Првуловић
доцент
Математички факултет Београд

Београд, 12 април 2017