

**СТАТИСТИКА И  
МАТЕМАТИЧКА СТАТИСТИКА**

**Проф. др Павле Младеновић  
Математички факултет, Београд**

**Мала сала Коларчеве задужбине, 11.04.2013.**

## План предавања:

1. **Шта је статистика?**
2. **Статистика и институције**
3. **Мало историје**
4. **Математичка статистика**
  - 4.1. **Шта је математичка статистика?**
  - 4.2. **Предмет и метод математичке статистике**
  - 4.3. **Веза математичке статистике и теорије вероватноћа**
  - 4.4. **Статистички подаци: метод узорка**
  - 4.5. **Типични задаци математичке статистике:**  
Расподеле обележја на узорку и 'вероватносне расподеле'
5. **Кратко о нашој статистици**

# **1. ШТА ЈЕ СТАТИСТИКА?**

## **1. ШТА ЈЕ СТАТИСТИКА?**

**Статистика је наука о учењу из података, као и о мерењу, контроли и усмеравању неизвесности и она зато обезбеђује управљање које је есенцијално за контролу научног и друштвеног развоја.**

**Davidian, M. & Louis, T. A. (Сајт Америчке статистичке асоцијације)**

## **1. ШТА ЈЕ СТАТИСТИКА?**

**Статистика је наука о учењу из података, као и о мерењу, контроли и усмеравању неизвесности и она зато обезбеђује управљање које је есенцијално за контролу научног и друштвеног развоја.**

**Davidian, M. & Louis, T. A. (Сајт Америчке статистичке асоцијације)**

**Шаљива дефиниција:**

**Статистика наша дика, што пожелиш та наслика.**

**Душко Радовић**

**Налимов, В.В. (1974): Вероятностная модель языка, Наука, Москва.**  
**200 'дефиниција' термина 'статистика'**

**Налимов, В.В. (1974): Вероятностная модель языка, Наука, Москва.**  
**200 'дефиниција' термина 'статистика'**

**"... Такозвана статистика је наука о управљању државом. Она садржи основне податке о карактеристичним цртама цивилизованог друштва."  
(1749)**

**Налимов, В.В. (1974): Вероятностная модель языка, Наука, Москва.**

**200 'дефиниција' термина 'статистика'**

**"... Такозвана статистика је наука о управљању државом. Она садржи основне податке о карактеристичним цртама цивилизованог друштва."  
(1749)**

**"Речи 'наука о управљању државом' означавају политику, зато их остављам филозофима - они се баве судовима који имају општи карактер, и желим да статистици, која се бави само емпиријским подацима, дам назив учење о држави..."  
(1752)**



**Налимов, В.В. (1974): Вероятностная модель языка, Наука, Москва.**

**200 'дефиниција' термина 'статистика'**

**"... Такозвана статистика је наука о управљању државом. Она садржи основне податке о карактеристичним цртама цивилизованог друштва."  
(1749)**

**"Речи 'наука о управљању државом' означавају политику, зато их остављам филозофима - они се баве судовима који имају општи карактер, и желим да статистици, која се бави само емпиријским подацима, дам назив учење о држави..."  
(1752)**

**"Статистика је буџет ствари." Наполеон Бонапарта**

**"... Математичка статистика је грана теорије вероватноћа. У њој се разматрају задаци повезани са оперативним карактеристикама правила индуктивног закључивања, заснованих на случајним експериментима."**

**Џерси Нејман (Jerzy Neyman) (1950)**

из руског превода књиге *"Уводни курс теорије вероватноћа и математичке статистике"*

**"... Математичка статистика је грана теорије вероватноћа. У њој се разматрају задаци повезани са оперативним карактеристикама правила индуктивног закључивања, заснованих на случајним експериментима."**

**Џерси Нејман (Jerzy Neuman) (1950)**

из руског превода књиге *"Уводни курс теорије вероватноћа и математичке статистике"*

**"Ако се сматра, како је то на заснован начин прихваћено, да је математичка статистика наука о математичким методима проучавања масовних појава, онда теорија вероватноћа треба да се сматра њеним органским делом..."**

**А.Н. Колмогоров (1948)**

Из реферата А.Н. Колмогорова на  
2. Свесавезном саветовању о математичкој статистици

## Карактеристике посла статистичара:

- **Коришћење статистичких података** при решавању проблема у врло различитим областима.
- **Примена знања из математике, посебно из теорије вероватноће и математичке статистике,** при решавању друштвених, економских, медицинских, политичких, еколошких ... проблема.
- Индивидуални и/или рад у оквиру интердисциплинарног тима.
- Путовања ради консултација са другим специјалистима или због учешћа у раду конференција и семинара, као и наставак образовања.
- Развој статистике, теорије вероватноћа и математике кроз образовање и научни рад.

## **2. СТАТИСТИКА и ИНСТИТУЦИЈЕ:**

- Званична државна статистика (Завод за статистику)
- Научне и образовне институције
- Асоцијације и удружења статистичара

### **International Statistical Institute (ISI) - основан 1885.**

- Bernoulli Society for Mathematical Statistics and Probability
- International Association for Official Statistics
- International Society for Business and Industrial Statistics
- International Association for Statistics Education
- International Association for Statistical Computing
- International Association of Survey Statisticians
- The International Environmetrics Society

### **3. МАЛО ИСТОРИЈЕ:**

# Jacob I Bernoulli (1654-1705)

## *Ars Conjectandi*

1713.



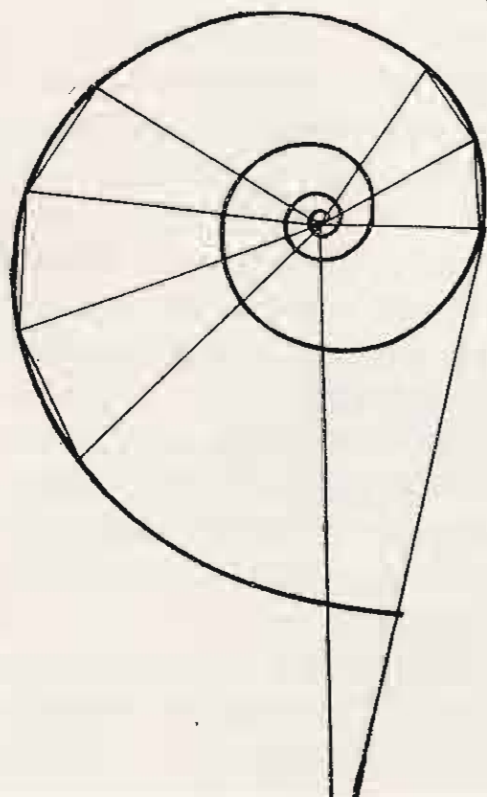
## Jacob I Bernoulli (27.12.1654. / 6.1.1655. - 16.8.1705.)

- Математичари из породице Бернули
- Дело Јакова Бернулија **Ars Conjectandi 1713.**
  - Закон великих вројева
    - Превод на немачки језик 1899.
    - Јубиларно издање Академије наука у Санкт Петербургу 1913. поводом **200 година закона великих бројева**
    - Издање на руском језику 1986. поводом **Првог светског конгреса Бернулијевог друштва** одржаног у Ташкенту
- Друга дела Јакова Бернулија
  - Дело о логаритамској спирали 1692



Дальнейшее развитие закона больших чисел я отношу уже к настоящему времени. Распространяться о нем я не буду; скажу только, что оно состоит в расширении области применимости предельных теорем и, в особенности, в распространении их на связанные испытания и связанные величины, при чем с успехом применяется не только метод Лапласа и его последователей, но и метод Чебышева<sup>33)</sup>.

Заканчивая речь, возвращаюсь к Якову Бернулли. В биографиях его упоминается, что, следуя примеру Архимеда, он завещал начертить на его памятнике логарифмическую спираль и сделать надпись «Eadem mutata resurgo»<sup>34)</sup>. Надпись эта, конечно, указывает на найденные им свойства кривой. Но она имеет и другой смысл. В ней выражается надежда Бернулли на воскресение и вечную жизнь. Мы можем сказать, что надежда его осуществляется. Со времени смерти Бернулли прошло более 200 лет; однако, он живет и будет жить в своей теореме.



Къ 200 лѣтнему юбилею закона большихъ чиселъ, Стеклова



ЧАСТЬ ЧЕТВЕРТАЯ

СОЧИНЕНІЯ

ЯКОВА БЕРНУЛЛИ

„Ars conjectandi“.

Переводъ

Я. В. Успенскаго.

Съ портретомъ Якова Бернулли.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.

ТИПОГРАФІЯ ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМІИ НАУКЪ.

Вид. Деп. 9 лн., № 12.

1913.

JACOBI BERNOULLI,  
Profess. Basil. & utriusque Societ. Reg. Scientiar.  
Gall. & Pruss. Sodal.  
MATHEMATICI CELEBERRIMI,  
ARS CONJECTANDI,  
OPUS POSTHUMUM.

*Accedit*  
TRACTATUS  
DE SERIEBUS INFINITIS,

Et Epistola Gallicè scripta  
DE LUDO PILLÆ  
RETICULARIS.



BASILEÆ,  
Impensis THURNISIORUM, Fratrum.

cl. MCC. XIII.

Я. БЕРНУЛЛИ

О ЗАКОНЕ  
БОЛЬШИХ  
ЧИСЕЛ

Перевод с латинского  
*Я. В. Успенского*

Под редакцией и с предисловием  
*А. А. Маркова*

С приложением  
юбилейной речи *А. А. Маркова*,  
предисловия *А. Н. Колмогорова*  
и комментариев

Под общей редакцией  
*Ю. В. Прохорова*



МОСКВА «НАУКА»  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1986



I ВСЕМИРНЫЙ КОНГРЕСС  
ОБЩЕСТВА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ  
И ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ИМЕНИ БЕРНУЛЛИ



Пишите индекс предприятия связи места назначения

СССР  
I  
ВСЕМИРНЫЙ КОНГРЕСС  
ОБЩЕСТВА  
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ  
СТАТИСТИКИ  
И ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ  
ИМЕНИ БЕРНУЛЛИ  
ТАШКЕНТ 1988  
ТАШКЕНТ • ДОЧТАНИ • ТУШКЕНТ



Куда \_\_\_\_\_

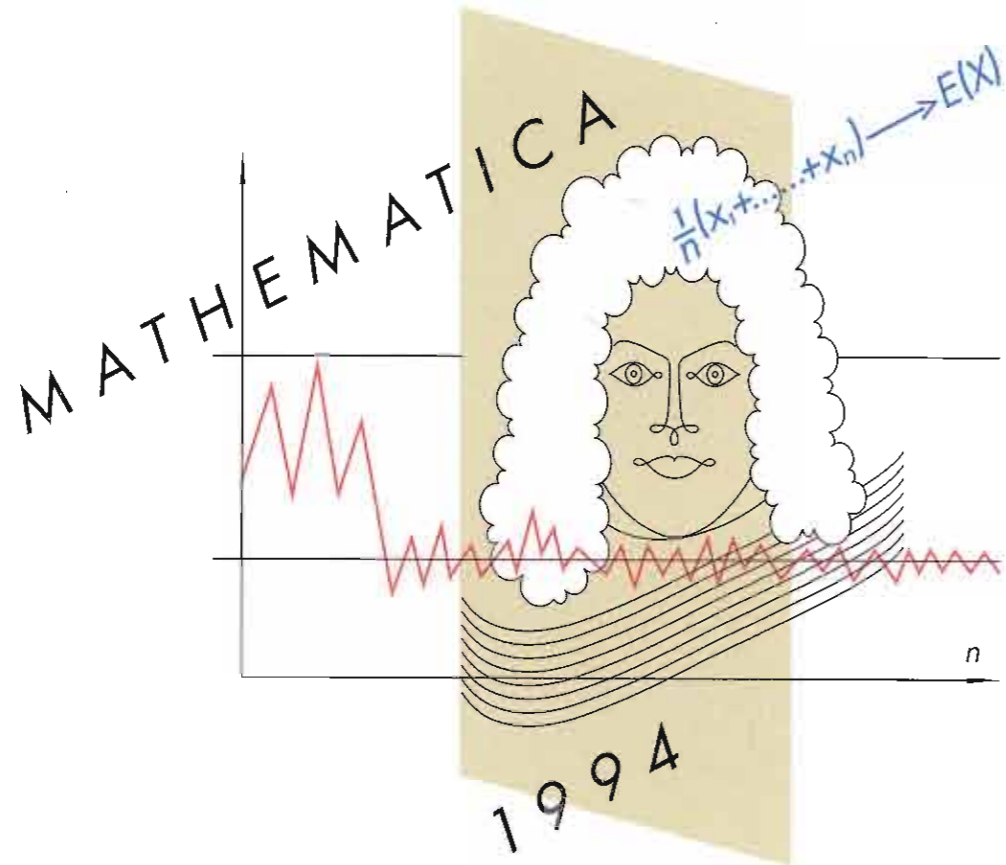
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

Кому \_\_\_\_\_

Индекс предприятия связи и адрес отправителя

\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

3000 BERN  
 Giorno d'emissione  
 Jour d'émission  
 Ausgabetag  
 15.3.94



## **Статистичари који су најзаслужнији за развој метода математичке статистике:**

**Jakob I Bernoulli (1654-1705)**  
**Pierre Simon de Laplace (1749-1827)**  
**Siméon Denis Poisson (1781-1840)**  
**Carl Friedrich Gauss (1777-1855)**

**Віктор Яковлевич Буняковський (1804-1889)**  
**Пафнүтий Львóвич Чебышëв (1821-1894)**  
**Андрéй Андрéевич Мáрков (1856-1922)**  
**Александр Михайлович Ляпунов (1857-1918)**  
**Сергéй Натáнович Бернштéйн (1880-1968)**

**Lambert Adolphe Jacques Quetelet (1796-1874)**  
**Francis Galton (1822-1911)**  
**Karl Pearson (1857-1936)**

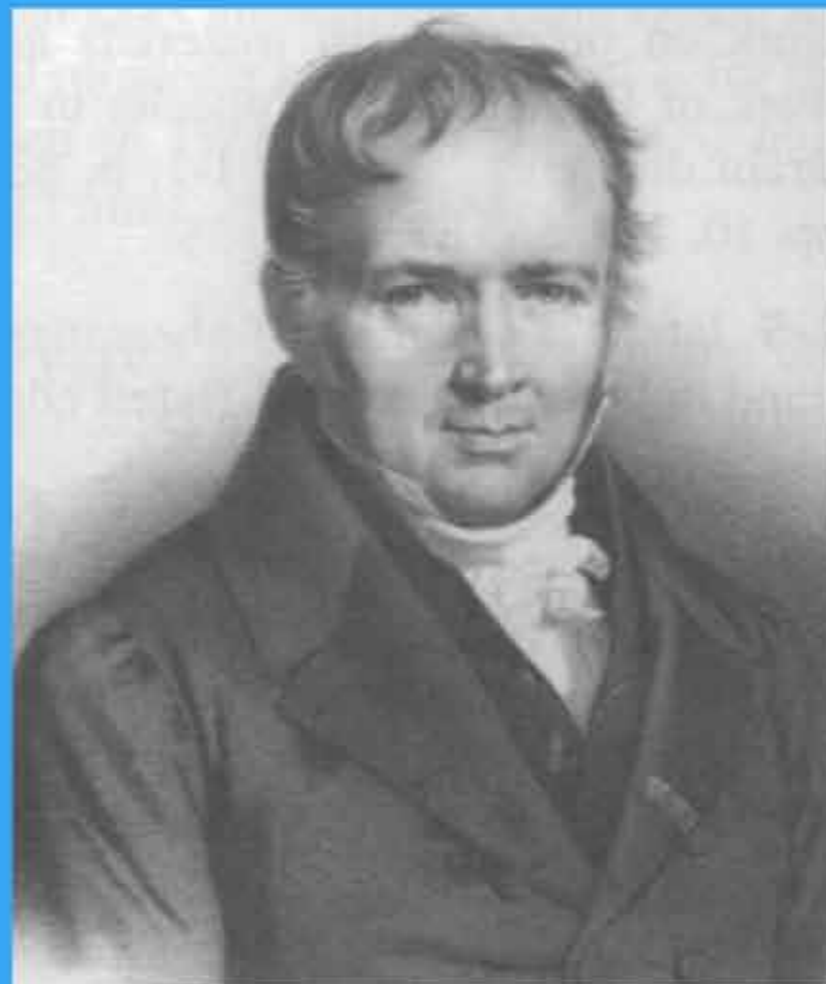
**Евгéний Евгéньевич Слүцкий (1880-1948)**  
**Николай Васильевич Смирнов (1900-1966)**  
**Логин Николаевич Большев (1922-1978)**  
**Всеволод Иванович Романовский (1879-1964)**

**William Sealy Gosset - Student (1876-1937)**  
**Ronald Aylmer Fisher (1890-1962)**  
**Egon Sharpe Pearson (1895-1980)**  
**Jerzy Neyman (1894-1981)**

**Андрéй Николаéевич Колмогóров (1903-1987)**  
**Ю́рий Владíмирович Лínник (1915-1972)**



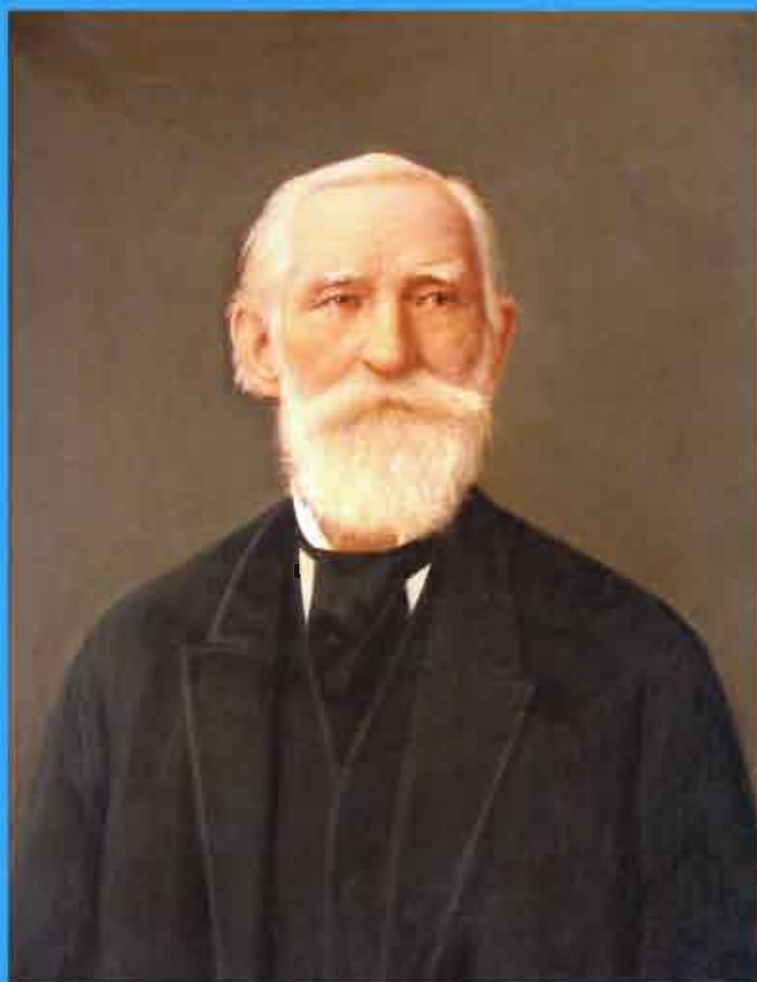
**Pierre Simon de Laplace (1749-1827)**



**Siméon Denis Poisson (1781-1840)**



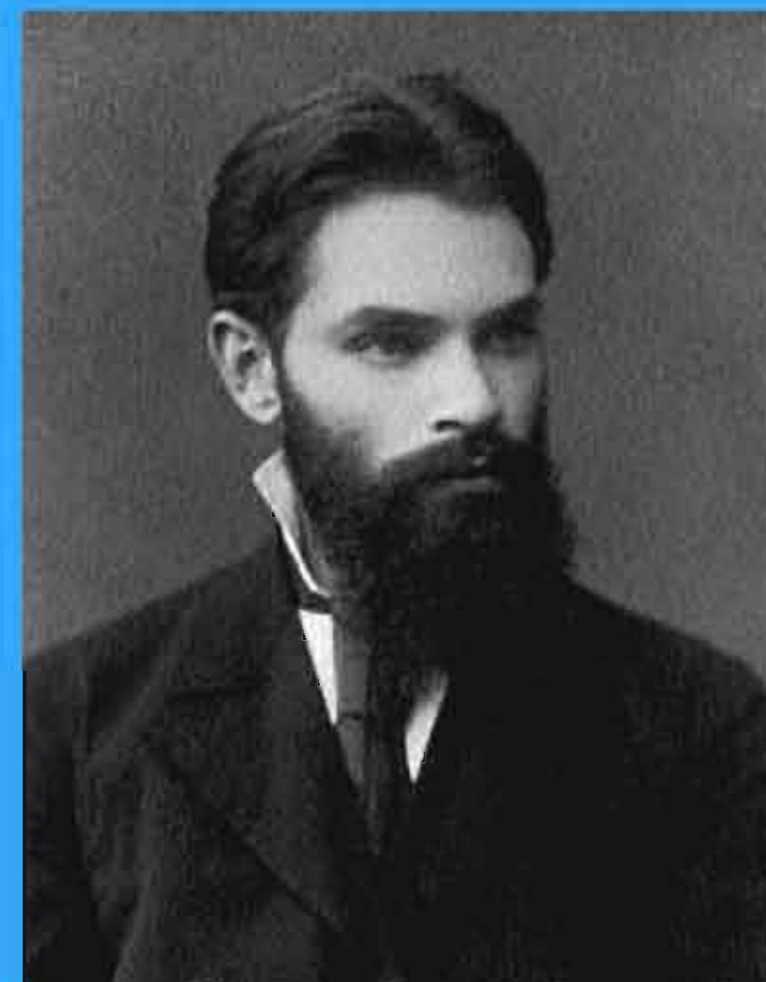
**Carl Friedrich Gauss (1777-1855)**



Пафну́тий Льво́вич Чебышёв (1821-1894)



Андре́й Андре́евич Ма́рков (1856-1922)



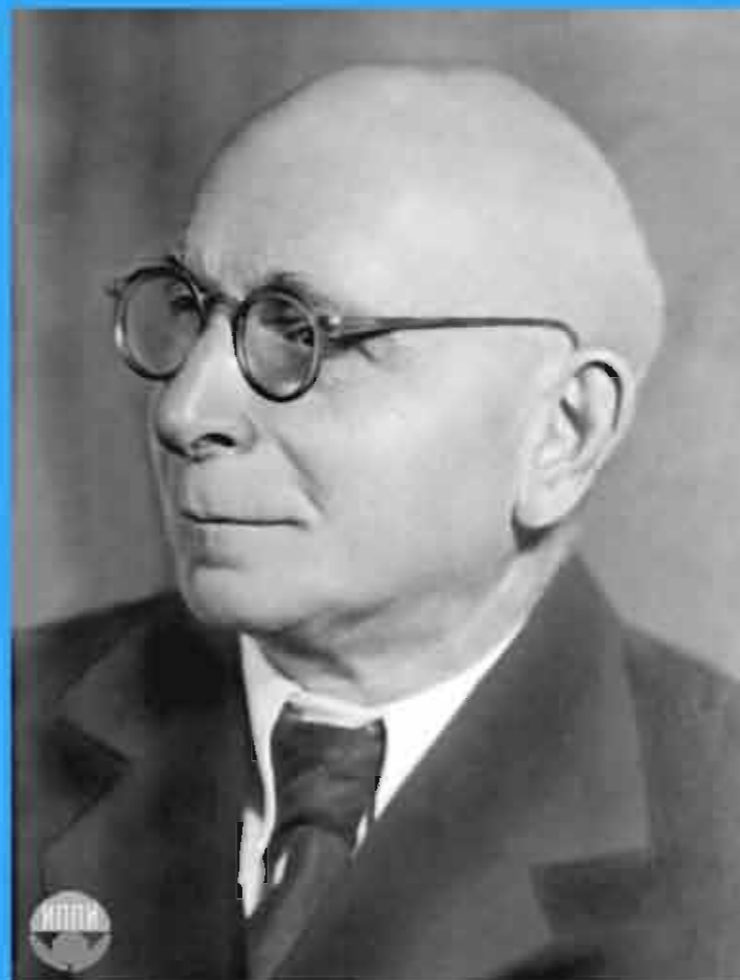
Алекса́ндр Миха́йлович Ляпуно́в (1857-1918)





Фотостудия Бориса Билибина в г. Копенгаген.

*В. А. Гундяковскій.  
Амстердам, 1888 г.*



**Сергей Натанович Бернштейн (1880-1968)**

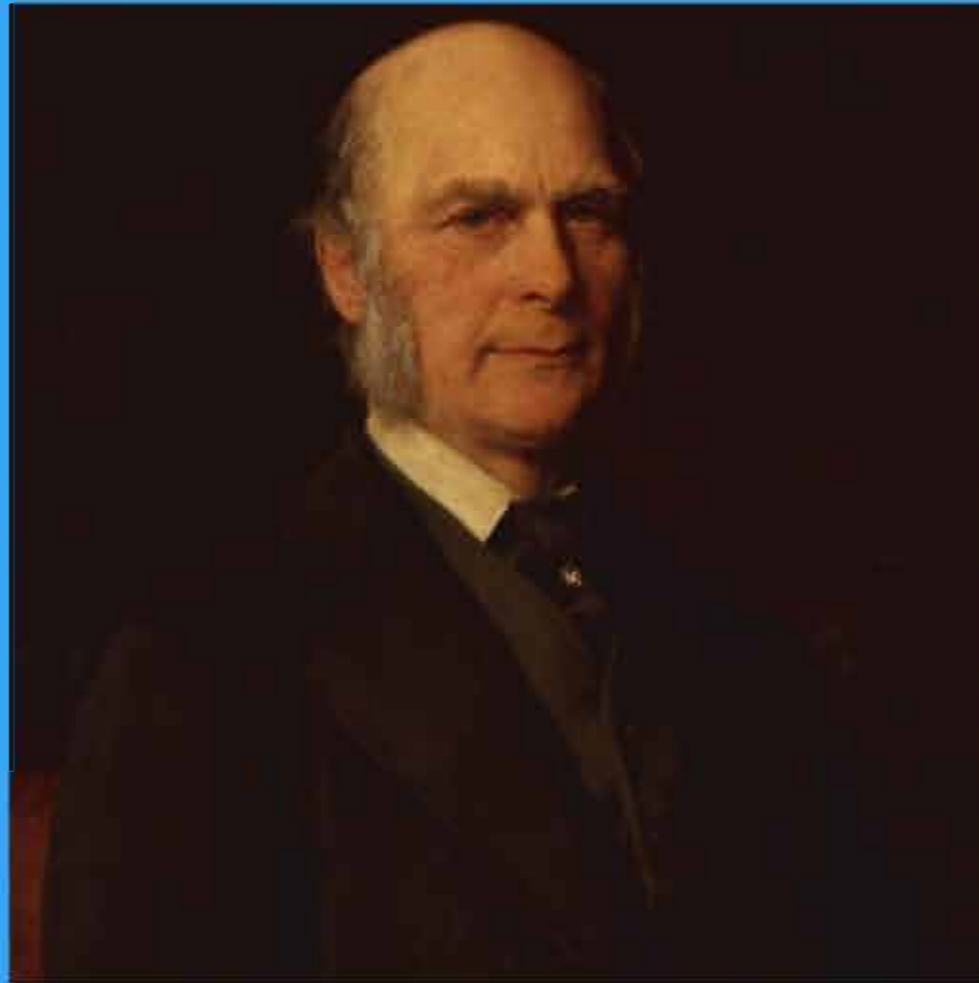


**Юрий Владимирович Линник (1915-1972)**





**Adolphe Quetelet (1796-1874)**



**Francis Galton (1822-1911)**



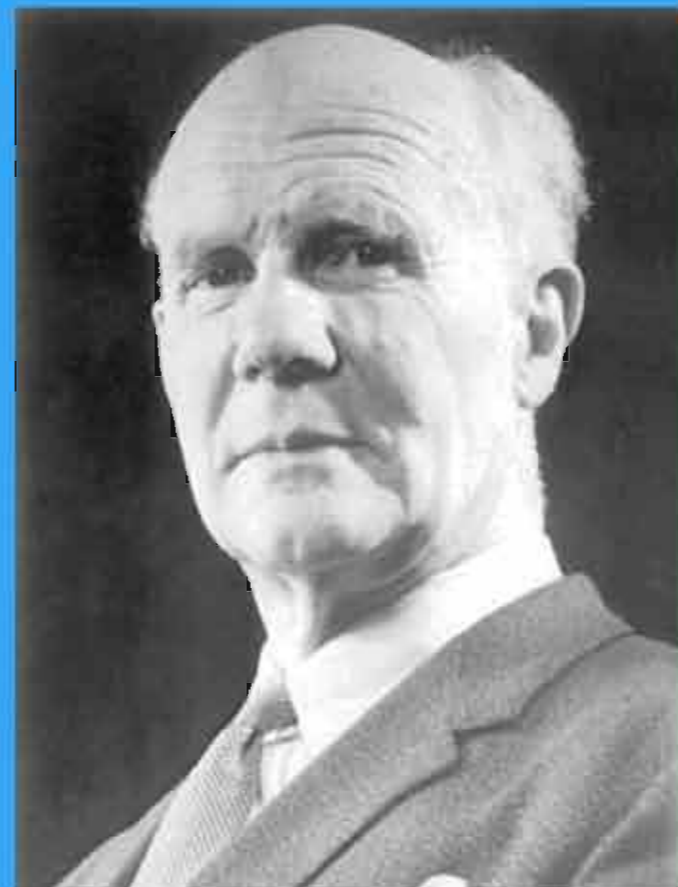
**Karl Pearson (1857-1936)**



**William Sealy Gosset-Student (1876-1937)**



**Ronald Aylmer Fisher (1890-1962)**



**Egon Sharpe Pearson (1895-1980)**



**Jerzy Neyman (1894-1981)**



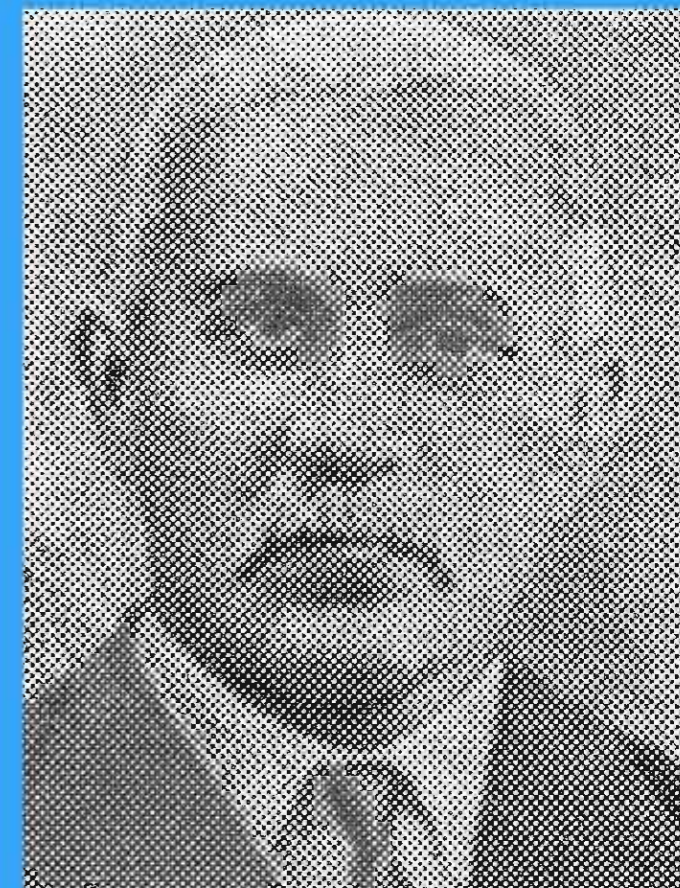
**Евгѣний Евгѣньевич Слѹцкій (1880-1948)**



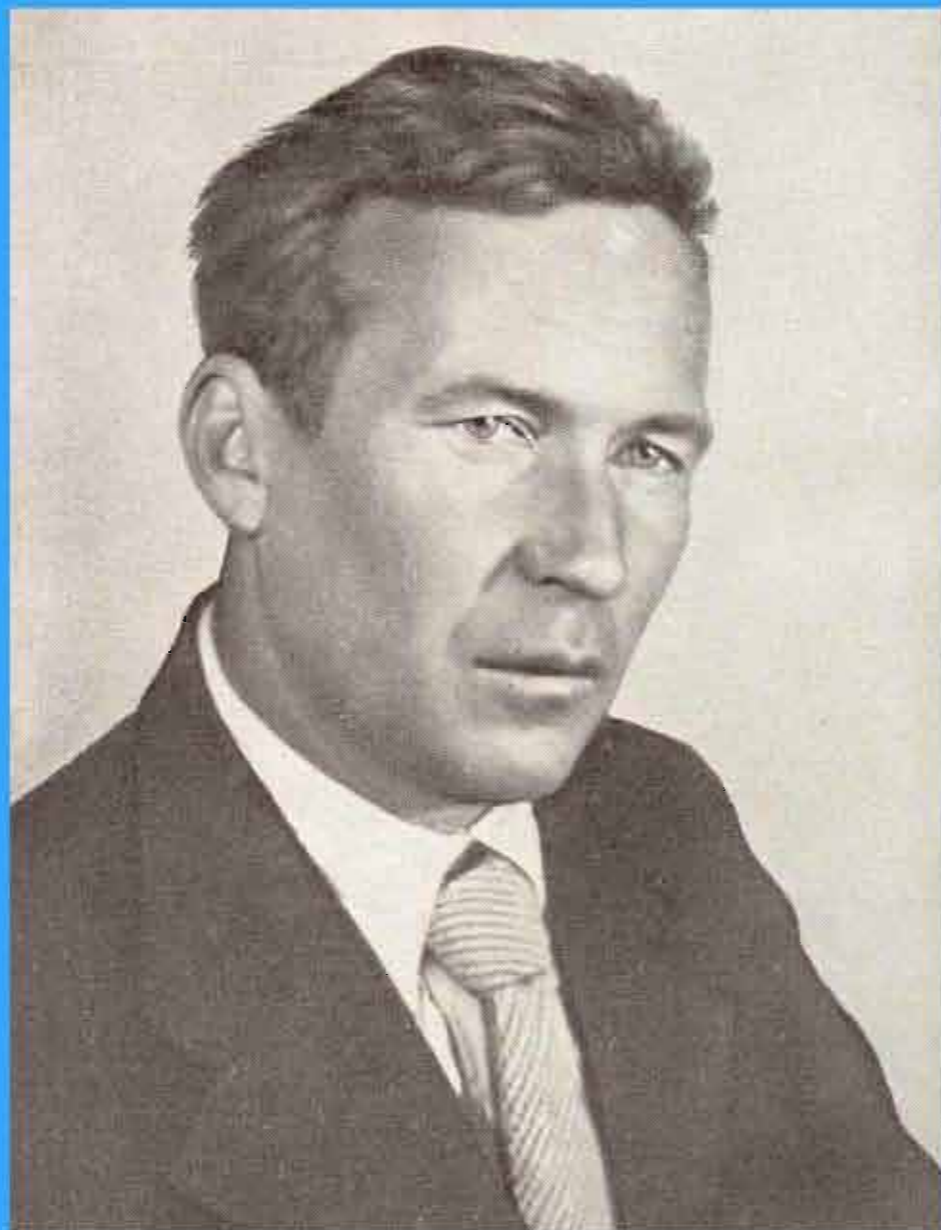
**Николай Васильевич Смирнов (1900-1966)**



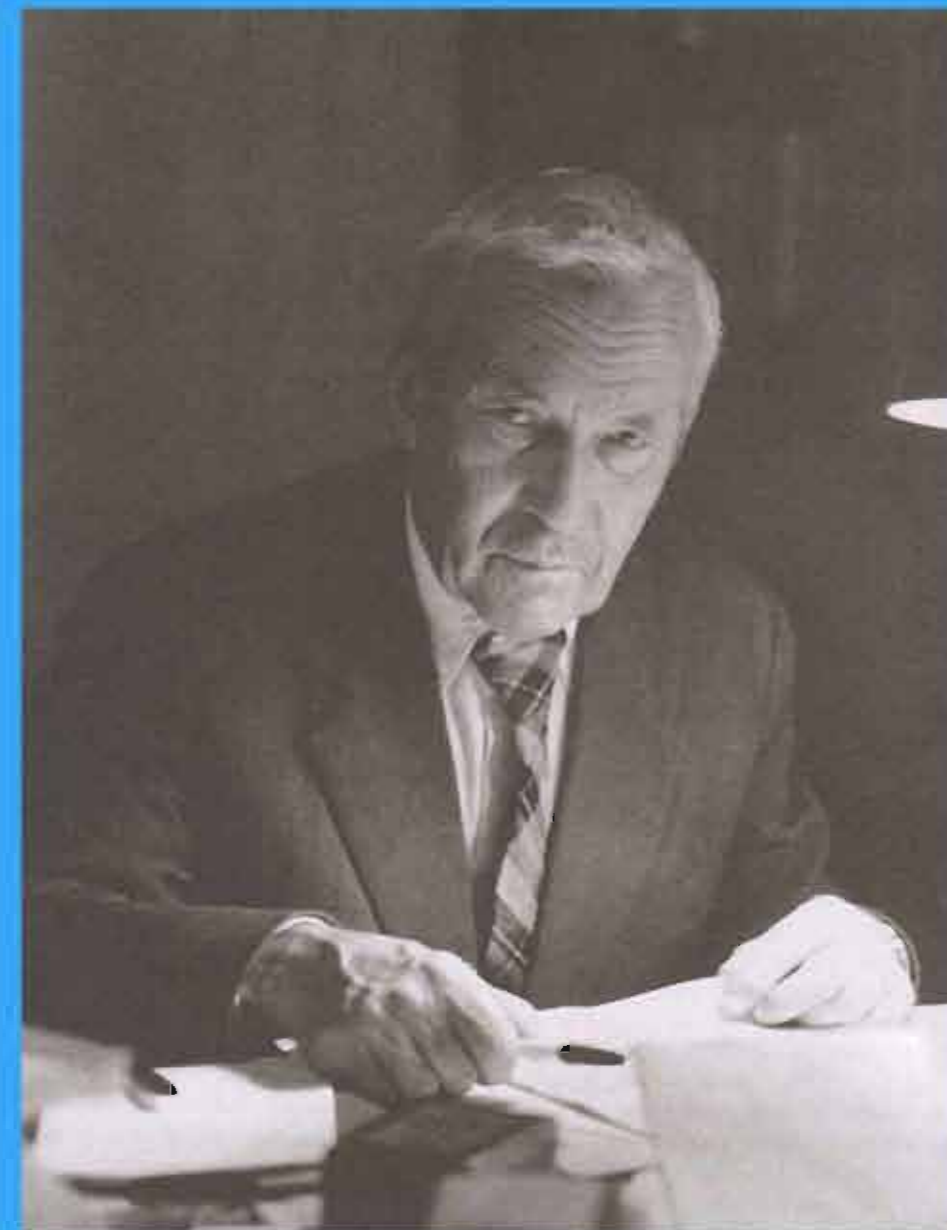
**Логин Николаевич Большев (1922-1978)**



**Всеволод Иванович Романовский (1879-1964)**



Андрей Николаевич Колмогоров (1903-1987)



Андрей Николаевич Колмогоров (1903-1987)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \sqrt{n} \cdot \sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)| \leq t \right\} = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2 t^2}$$

## **4. МАТЕМАТИЧКА СТАТИСТИКА**

### **4.1. ШТА ЈЕ МАТЕМАТИЧКА СТАТИСТИКА?**

**Математичка статистика је део математике, који је посвећен математичким методима систематизације, обраде и коришћењу статистичких података у научном и практичном закључивању.**

**А.Н. Колмогоров, Ю.В. Прохоров (Математическая энциклопедия)**

## **4.2. ПРЕДМЕТ И МЕТОД МАТЕМАТИЧКЕ СТАТИСТИКЕ**

**Предмет:** Описивање скупа објеката које се налази између индивидуалног описа сваког објекта посебно и описа скупа објеката по општим својствима, за које није потребно уопште рашчлањивати скуп на посебне објекте.

**Метод:** Статистички метод описивања је метод који се базира на разматрању статистичких података о неком скупу објеката. Користи се у врло различитим областима.

### **4.3. ВЕЗА МАТЕМАТИЧКЕ СТАТИСТИКЕ СА ТЕОРИЈОМ ВЕРОВАТНОЋА**

Теорија вероватноћа проучава **случајне појаве** код којих има смисла говорити о **расподелама вероватноћа** које тим појавама одговарају. При статистичком пручавању оваквих појава користе се делови **МС** засновани на **ТВ**, као што су **статистичка провера хипотеза** и **статистичко оцењивање**.

Теорија вероватноћа се користи и за проучавање масовних појава које немају строго вероватносни карактер, али се при проучавању користе методи засновани на теорији вероватноћа, као што су **метод узорка** и **теорија грешака**.

## 4.4. СТАТИСТИЧКИ ПОДАЦИ: МЕТОД УЗОРКА

- **Статистички подаци**
  - Прост случајни узорак
  - Методи добијања случајних узорака
- **Временске серије**
- **Статистички подаци као реализоване вредности случајних величина**

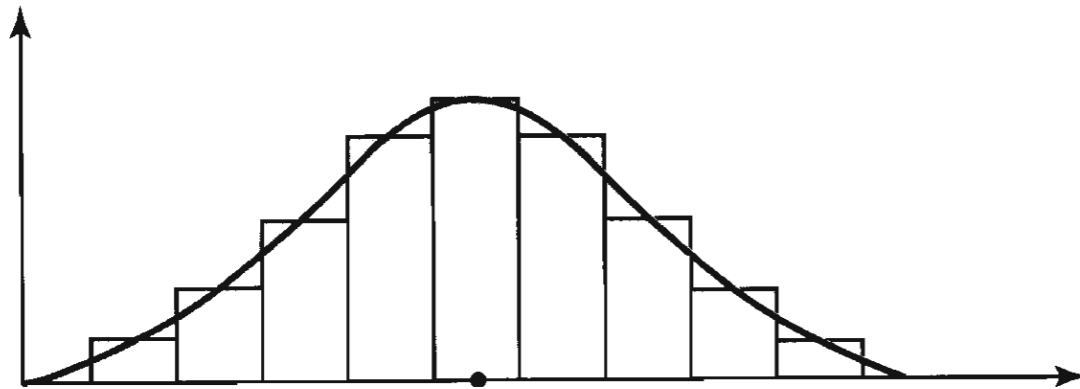
$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \uparrow & \uparrow & \dots & \uparrow \\ X_1 & X_2 & \dots & X_n \end{array}$$

$$f(X_1, X_2, \dots, X_n)$$



## 4.5. ТИПИЧНИ ЗАДАЦИ МАТЕМАТИЧКЕ СТАТИСТИКЕ

### Расподела обележја на узорку и 'вероватносне расподеле'



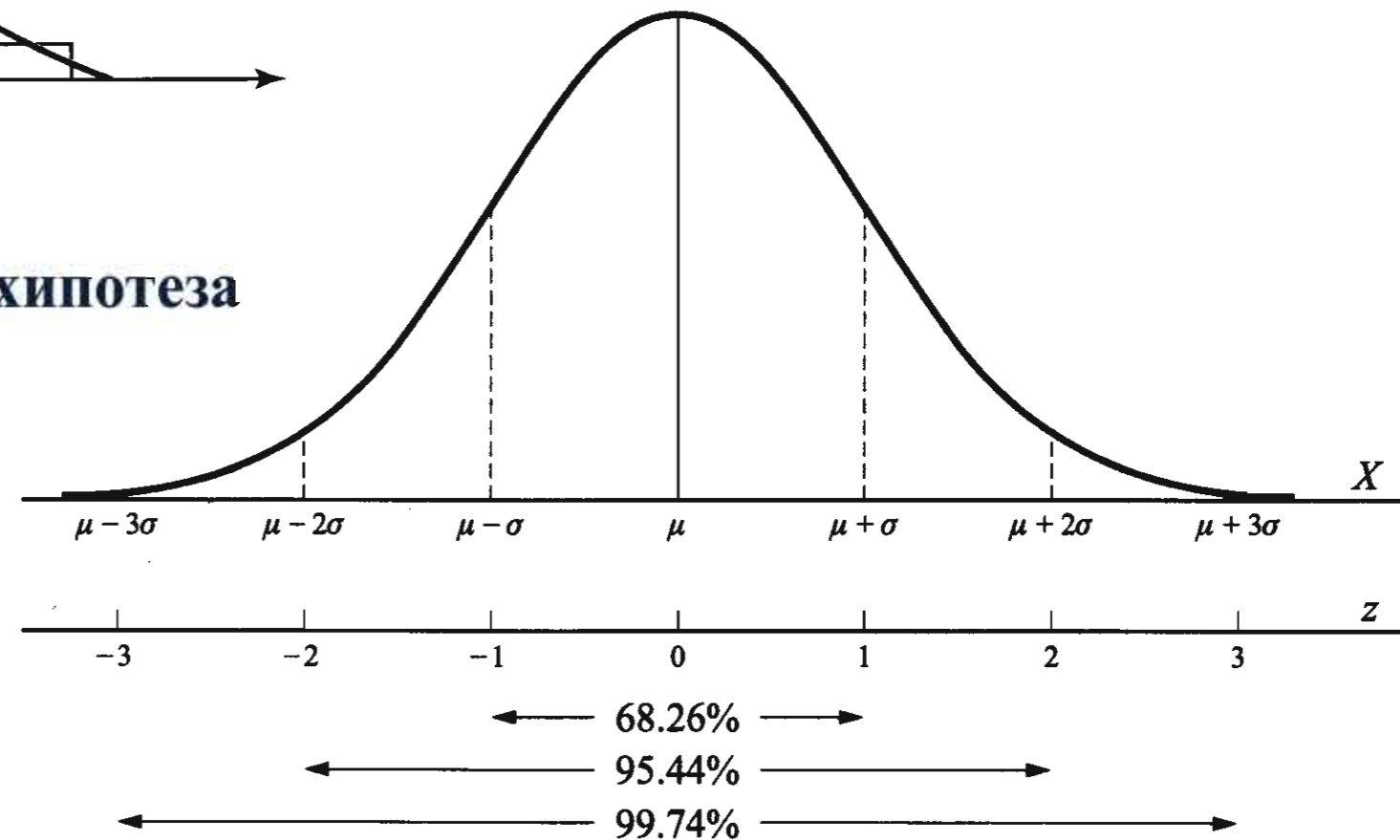
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Оцењивање параметара

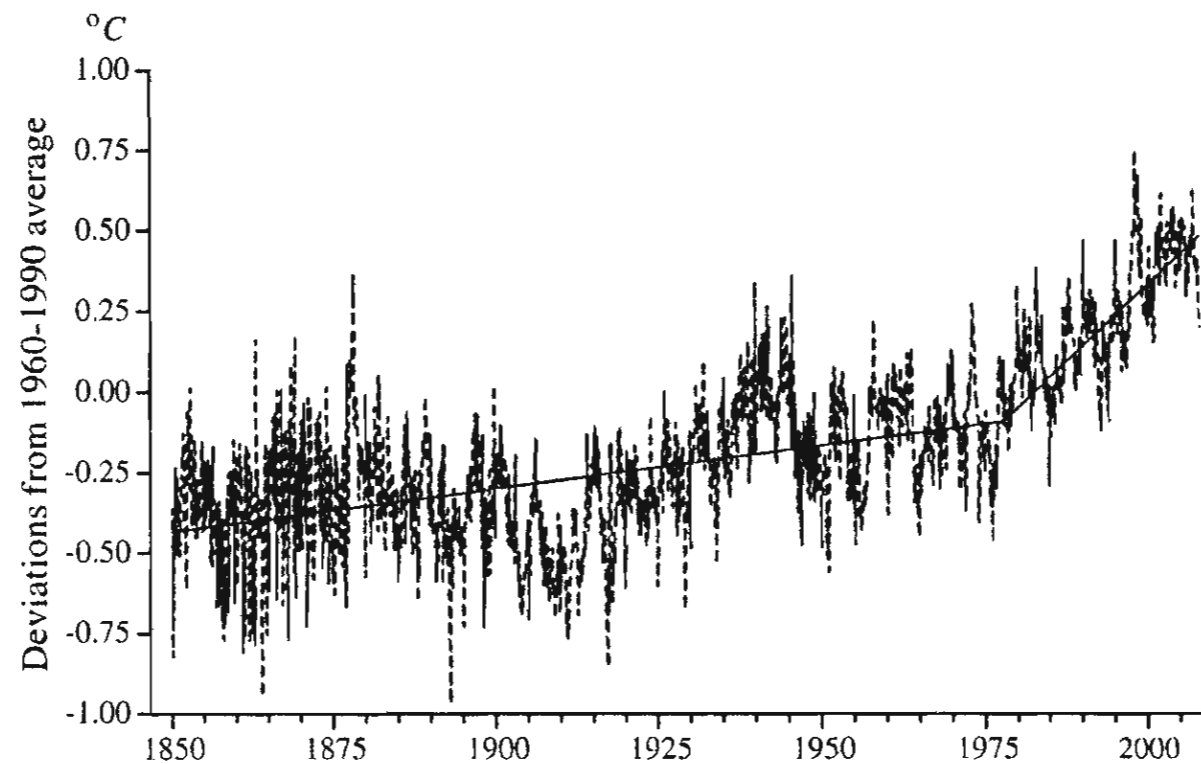
Тестирање статистичких хипотеза

$$\bar{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$$

$$\bar{s}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x}_n)^2$$



- **Стохастички модели временских серија**



- **Mathematics Subject Classification 2000 (2010)**
- **Примене у другим областима и питања 'из праксе'**



**01.05.2008. Туристички водич: "Статистичари МДУ су израчунали..."**

## **JANKOVIĆ: Nisam ni znala da sam ostvarila 500. trijumf, loš sam statističar**

06. 04. 2013. - 09:59h

Jelena Janković plasirala se u polufinale Čarlstona trijumfom nad Kanadankom Judžin Bušard sa 6:2, 6:1, što je bila njena 500. pobjeda u karijeri. Osamnaesta teniserka sveta nije znala za taj podatak, dok joj posle meča nije saopšten.



"Nisam ni znala za to, iznenadila sam se kada su mi rekli. Loš sam statističar, pa nisam imala taj podatak u vidu. Ali lepa je brojka, velika je stvar doći do 500 pobjeda. Nadam se da će ih biti još, ne znam samo koliko je teniserki to ostvarilo. Da biste došli do toga, morate da imate dugu karijeru i budete prilično konstantni", rekla je Jankovićeva [posle meča](#).

[Blic Sport]

## 5. О НАШОЈ СТАТИСТИЦИ

**1808.** Устаничка велика школа

**1838.** Виша школа - Лицеј, у Крагујевцу. Међу наставним предметима налази се предмет **Статистика**. Предавач Статистике и Немачког језика био је **Петар Радовановић**, један од прва два професора Лицеја.

**1863.** Одељења Лицеја прерасла су у факултете - **Филозофски, Правни и Технички**, при чему се математика предаје само на Техничком факултету.

**1873.** На Филозофском факултету основани **Историјско-филолошки и Природно-математички одсек** (где се изучавају природне науке и математика). Међу 8 заједничких предмета за цео Филозофски факултет налази се и предмет **Статистика**.

**1947.** **Формиран Природно-математички факултет**  
**1951/52.** **Теорија вероватноћа** се предаје као изборни предмет  
**1952/53.** Предмет **Теорија вероватноћа** и специјални курс  
**Примена теорије вероватноћа.**  
Предавачи: Драгољуб Марковић и Часлав Станојевић

**1961/62.** Последипломске студије: **5 смерова** на целом ПМФ

**1966/67.** **Смер за статистику**

**1972.** **Смер за статистику са применама**

**Катедра за вероватноћу и статистику**

Предавачи предмета у области вероватноће и статистике:

**Зоран Ивковић, Стеван Стојановић, Јован Малишић, ...**

У неком тренутку смер мења име у **Смер за вероватноћу и статистику.**

## **ДОКТОРИ НАУКА:**

- Часлав Станојевић
- Зоран Попстојановић
- Петар Тодоровић
- Зоран Ивковић
- Стеван Стојановић
- Јован Укшановић
- Јован Малишић
- Јелена Булатовић
- Драган Бањевић
- Слободан Јанковић
- Ратомир Пажанин
- Фуат Ризваноли
- Предраг Перуничкић
- Слободанка Јањић
- Павле Младеновић

- Благота Лучић
- Љиљана Петрушевски
- Тибор Погањ
- Зоран Глишић
- Светлана Јанковић
- Слободанка Митровић
- Дражен Пантић
- Биљана Поповић
- Весна Јевремовић
- Ранко Недељковић
- Сениша Стаматовић
- Виктор Обуљен
- Драган Ђорић
- Јован Вукмировић
- Ивана Илић
- Јелена Јоцковић

## **Смер за СТАТИСТИКУ, АКТУАРСКУ и ФИНАНСИЈСКУ математику**

**24.06.2005.** Научно наставно веће Математичког факултета усвојило нове планове и нови назив смера: **Статистика, актуарска и финансијска математика.**

**2006.** Уписана прва генерација студената по новим плановима

**2009.** Акредитовани програми

**Карактеристике:** модул у оквиру студијске групе математика са основама које су заједничке за све модуле.

**Предмети:** Увод у вероватноћу, Увод у статистику

Теорија вероватноћа, Математичка статистика, Случајни процеси,

Теорија узорака, Линеарни статистички модели, Теорија информација,

СМОИ, Временске серије и примене у финансијама, Статистички софтвер

**Елементи актуарске математике, Елементи финансијске математике**