

Profesor Đuro Kurepa (1907 – 1993) pripada najužem krugu najznačajnijih srpskih matematičara. Pored velikog naučnog opusa, za sobom je ostavio neizbrisiv uticaj na razvoj savremene matematike u prethodnoj Jugoslaviji. Njegovo ime dobro je prepoznato u svetskoj matematici, naročito po radovima iz teorije skupova i opšte topologije. Njegovi rezultati nalaze se u skoro svakoj savremenoj knjizi iz teorije skupova. U ovom rukopisu predstavljeni su život i delo Đure Kurepe.

Đuro Kurepa se rodio 16. avgusta 1907. u Majskim Poljanama kod Gline u Srpskoj Krajini kao četrnaesto i poslednje dete Radeta i Anđelije Kurepa. Osnovnu i srednju školu pohađao je u Majskim Poljanama, Glini i Križevcima. Diplomirao je teorijsku matematiku i fiziku na Filozofskom fakultetu Univerziteta u Zagrebu 1931. Period 1932-1935 proveo je u Parizu na *Faculté des Sciences* i *Collège de France*. Doktorsku disertaciju odbranio je 1935. pred komisijom čiji su članovi bili Paul Montel (predsednik), Maurice Fréchet (mentor), i Arnaud Denjoy. Na post-doktorskim studijama boravio je na nekim od najboljih institucija na svetu: Univerzitet u Varšavi i Univerzitet u Parizu (1937), dok je po završetku Drugog svetskog rata, neko vreme proveo na Kembridžu (Masačusets), zatim matematičkim departmanima univerziteta u Čikagu, Berkliju i Los Anđelesu, kao i na *Institute of Advanced Studies* u Princetonu.

Prvo Kurepino zaposlenje bilo je na Univerzitetu u Zagrebu 1931. godine, gde je radio kao asistent za matematiku. Na istom Univerzitetu 1937. je izabran za docenta, 1938. za vanrednog profesora i za redovnog profesora 1948. godine. U Zagrebu je predavao do 1965. kada prelazi u Beograd, gde je pozvan za redovnog profesora na Prirodno-matematičkom fakultetu. Ovde ostaje do kraja svog radnog veka 1977, kada odlazi u penziju. U međuvremenu, kao gostujući profesor boravi na *Columbia University* u Njujorku (Letnja škola 1959.) i na Univerzitetu u Boulderu, Kolorado, 1960. Pored univerzitetskih predavanja Kurepa je takođe uspešno organizovao naučni rad na Fakultetu. Osim toga, bio je vrlo aktivan u administrativnim poslovima. Profesor Kurepa je bio upravnik matematičkog Odseka Filozofskog fakulteta u Zagrebu, zatim upravnik Odeljenja za matematiku Matematičkog instituta SANU (1970-1980), a sedamdestih godina je jedno vreme bio i upravnik Instituta za matematiku Prirodno-matematičkog fakulteta u Beogradu. Bio je redovni član SANU, zatim član Akademije nauka Bosne i Hercegovine i dopisni član JAZU.

Profesor Kurepa bio je osnivač i predsednik Društva matematičara i fizičara Hrvatske i takođe predsednik Unije jugoslovenskih društava matematičara i astronoma. Takođe, bio je predsednik Nacionalnog Komiteta za matematiku, a isto tako predsednik Balkanskog matematičkog društva. Pored toga, bio je član redakcija naučnih časopisa, beogradskih *Publications de l'Institut Mathématique*, *Vesnik* i nemačkog *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik*.

Profesor Kurepa bio je dobitnik mnogobrojnih priznanja i nagrada. Tako, laureat je najvišeg priznanja stare Jugoslavije, Nagrade AVNOJ-a (1976). Bio je član američko-kanadskog Teslinog memorijalnog društva (1982), i dobitnik povelja *Bernhard Bolzano*, i *Marin Drinov* Bugarske Akademije nauka (Sofia 1987). Profesor Đuro Kurepa umro je 1993. godine.

Naučni opus Đura Kurepe je veoma veliki. Publikovao je preko 200 naučnih radova i više od 700 drugih spisa: knjige, članke i preglede. Njegovi radovi objavljeni su u časopisima širom sveta, a neki od njih štampani su u najpoznatijim matematičkim časopisima, na primer:

Mathematische Annalen, Izvestiya Akademii nauk SSSR, Fundamenta Mathematicae, Acta Mathematica, Comptes Rendus de l'Académie des sciences, Bulletin de la Société Mathématique de France, Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik, Journal of Symbolic Logic, Pacific Journal of Mathematics. Mnoge njegove rasprave prevedene su po objavljivanju na engleski, francuski, italijanski i na druge jezike. Kurepa je takođe napisao oko 1000 pregleda za referativne žurnale. Profesor Kurepa je bio pravi ambasador jugoslovenske nauke. Držao je predavanja na mnogim univerzitetima u Evropi, Americi i Aziji, između ostalih u Varšavi, Parizu, Moskvi, Jerusalimu, Istanbulu, Kembridžu, Bostonu, Čikagu, Berkliju, Princetonu i Pekingu. O tome je sam Kurepa jednom prilikom rekao: "*Držao sam predavanja na svakom od devetnaest univerziteta (prethodne) Jugoslavije, zatim u skoro svim evropskim zemljama, takođe u Kanadi, Kubi, Izraelu i Iraku. Takođe sam održao bar po deset predavanja u svakoj od sledećih zemalja: Francuskoj, Italiji, Nemačkoj, Sovjetskom Savezu i Sjedinjenim Američkim Državama.*" Učestvovao je na desetinama internacionalnih matematičkih simpozijuma, a za mnoge je bio glavni organizator (na primer, *Internacionalna konferencija iz topologije*, Herceg Novi 1968, Budva-Bečići 1972, Beograd 1977).

Uticaj profesora Kurepe na razvoj matematičkih nauka u Jugoslaviji bio je zaista veliki. Kao profesor Univerziteta u Zagrebu uveo je nekoliko novih matematičkih disciplina, uglavnom koje se odnose na osnove matematike i teoriju skupova. O tome svedoče i reči zagrebačkog matematičara Kajetana Šepera: "*Profesor Kurepa nije bio samo profesionalni matematičar, već pravi naučnik, filozof i humanista u pravom smislu ovih reči. Bio je pionir i osnivač u oblasti matematičke logike i zasnivanja u Hrvatskoj i modernih matematičkih teorija u Hrvatskoj i Jugoslaviji. On je bio katalizator, inicijator i nosilac matematičkih nauka kod nas.*" (Simpozium: *Set theory. Foundations of mathematics*, International Symposium dedicated to Đuro Kurepa, Beograd 1977.)

Drugom prilikom (*Professor Đuro Kurepa*, Glasnik Matematički Vol. [28](48), 1993, No.2, pp. 333-343.) poznati zagrebački profesor Sibe Mardešić rekao je "*Svojim radom i uticajem na Univerzitetu u Zagrebu, posebno uvodeći moderne aspekte u matematiku, Kurepa je dao veliki doprinos našem društvu.*"

Kurepa je došao po pozivu u Beograd sredinom šezdesetih godina. Njegov uticaj na beogradsku matematiku, može se opisati skoro istim rečima. Profesor Kurepa izlagao je najnovije rezultate iz različitih matematičkih disciplina kroz redovne i postdiplomske kurseve, seminare i predavanja na Prirodno-matematičkom fakultetu i Matematičkom institutu. Teme njegovih predavanja uključivale su: *Cohen*-ovu forsing konstrukciju, pitanja nezavisnosti iz kardinalne i ordinalne aritmetike, uređene skupove i opštu topologiju. Ali Kurepa se zanimao i za druge teme. Dao je vredne doprinose u analizi, algebri, teoriji brojeva, pa i u disciplinama u nastajanju, kao što je računarstvo. O univerzalnosti njegovog duha kazuju i univerzitetski kursevi koje je predavao: algebra, analiza, topologija i teorija skupova.

Publikovanjem svoje disertacije *in extenso* u *Publications Mathématiques de l'Université de Belgrade*, 4 (1935), 1-138, Kurepa je ostvario prvi kontakt sa beogradskom matematičkom sredinom. Početkom pedesetih, ovi kontakti postali su dublji i češći. Tako, u članku (*Povodom 35 godina knjige "Teorija skupova" profesora Đura Kurepe* Istorijski spisi iz matematike i mehanike, Istorija matematičkih i mehaničkih nauka, knj. 2, Matematički institut, Beograd, 1989.) profesora Zlatka Mamuzića možemo videti da je Kurepa pozvan već 1952. da poseti Univerzitet u Beogradu. Tom prilikom održao je predavanje iz matricnog računa i takođe

održao seminar sa temama iz teorije skupova, topologije i algebre. Učesnici seminara su bili onda mladi, kasnije poznati naši matematičari: Časlav Stanojević, Mirko Stojaković, Simon Četković i drugi. Učestvovanjem u radu ovih seminara, matematičari su dobijali ideje za svoje radove, dok su postdiplomci dobijali teme za svoje magistarske i doktorske disertacije. Veliki broj ovih tema formulisao je ili podstakao sam Kurepa. Ovi radovi uključuju skoro sve doktorske disertacije starije generacije topologa i mnogih algebrista iz cele (prethodne) Jugoslavije: Svetozara Kurepe, Zlatka Mamuzića, Sibe Mardešića, Pavla Papića, Viktora Sedmaka, a zatim nekoliko godina kasnije matematičara: Ljubomira Ćirića, Rada Dacića, Milosava Marjanovića, Veselina Perića, Milana Popadića, Ernesta Stipanića i Mirka Stojakovića. Profesor Kurepa bio je mentor ili član doktorskih komisija 42 puta, između ostalih i akademika mlade generacije, Steve Todorčevića i Aleksandra Ivića.

Opišimo ukratko rad Đura Kurepe u topologiji, teoriji skupova i teoriji brojeva.

U topologiji jedan deo Kurepinih istraživanja odnosio se na funkcije rastojanja koje nisu brojevnog tipa. U tom kontekstu Kurepa je uveo nove prostore koji su danas poznati pod imenom Kurepini pseudometrički prostori. Kao što je pomenuto, Kurepa je sredinom tridesetih bio na doktorskim studijama u Parizu, i u to vreme, razumljivo, bio je pod uticajem francuske matematičke škole. Izučavajući radove svog profesora i mentora Fréchet-a, Kurepa je pristupio na sasvim nov način pojmu prostora. Definisao je pseudo-distancijalne prostore (*espaces pseudo-distanciés*, *Tableaux ramifiés d'ensembles*, *Espaces pseudo-distancies*, C.R. 1938, Paris, 1563-1565.), generalizujući na taj način Fréchet-ovu klasu D. U ovom prilazu, vrednosti funkcije rastojanja umesto u skupu pozitivnih realnih brojeva nalaze se u nekom potpuno uređenom skupu, dok se uslov trougla kod rastojanja zamenjuje jednom relacijom na uređenim skupovima. Kasnije i sam Fréchet dolazi do istih prostora, što svedoči o prirodnosti ove generalizacije, i od tada je ova klasa prostora poznata pod nazivom *Kurepa-Fréchet prostori*. U početku Fréchet nije znao za ove Kurepine radove, ali tokom njegove posete Beogradu posle Drugog svetskog rata, saznao je za Kurepine rezultate. Potom je više matematičara istraživalo ove prostore, između ostalih Z. Mamuzić, P. Papić, A. Appert, J. Colmez i V.G. Boltjanski. Spomenimo da se jedan od poslednjih Kurepinih radova odnosio na ovu temu, (*General Ecart*, Simp. Filomat '92, Niš October 8-10, Zb. radova Fil. fak. u Nišu, Ser. mat. 6;2(1992), 373-379). Može se reći da je u ovoj generalizaciji anticipiran danas veoma istraživani pojam Zadehových rasplnutih (fuzzy) skupova. U svakom slučaju fraza "skupovi zamazane strukture" pojavljuje se već u njegovoj knjizi *Teorija skupova* iz 1951.

Drveta, parcijalno uređeni skupovi u kojima je svaki donji konus dobro uređen skup, mogu se smatrati prirodnom generalizacijom pojma ordinalnog broja. Ona čine specijalan tip *ramifikovanih skupova* koje je Kurepa uveo u svom verovatno najvažnijem delu, doktorskoj disertaciji *Ensembles ordonnés at ramifiés*, (Teza je u potpunosti publikovana u Publ. Math. Univ. Belgrade, 4, 1-148). Smatra se (Videti, na primer, K. Kunen, *Set Theory*, North-Holland, Amsterdam, 1983, p. 69) da je ovaj rad prva sistematska studija o skupovnim drvetima, strukturama od centralnog interesa u savremenoj teoriji skupova. U tezi i u par radova koje je neposredno zatim objavio, (*Ensembles lineaires et une classe de tableaux ramifiés*, Publ. Math. Univ. Belgrade, 6, 129-160, i *A propos d'une generalisation de la notion d'ensamles bien ordonnés*, Acta Mathematica 75 (1942), 139-150) Kurepa je uveo fundamentalne pojmove teorije beskonačnih drveta: Aronszajnova drveta (beskonačna drveta kardinalnosti \aleph_1 , visine takođe \aleph_1 , u kojima je svaki lanac i svaki sloj najviše prebrojiv), Suslinova drveta (Aronszajnova drveta u kojima je svaki antilanac najviše prebrojiv), i Kurepina drveta (drveta kardinalnosti i visine \aleph_1 , a imaju \aleph_2 grana visine \aleph_1). Dakle, Kurepa je u Suslinovom i Kurepinom drvetu pronašao dva ekstremalna pojma, u prvom drvo

bez dugih lanaca (tj. dužine manje od \aleph_1), dok Kurepina drveta imaju maksimalno mnogo takvih lanaca, najmanje \aleph_2 . Kurepa je dokazao mnogo važnih i zanimljivih osobina koje se tiču ovih struktura. Verovatno je najpoznatija sledeća ekvivalencija koja se odnosi na čuvenu Suslinovu hipotezu SH:

$$SH \leftrightarrow \text{Ne postoji Suslinovo drvo.}$$

Ovde SH označava hipotezu da ne postoji Suslinov kontinuum, tj. linearno uređen skup L prebrojive celularnosti, dakle skup u kojem je svaka familija disjunktnih intervala najviše prebrojiva, ali koji nema prebrojiv gust podskup.

Lebesgue je u svom članku iz 1905. implicitno identifikovao analitičke funkcije sa Bair-ovim funkcijama. U svom dokazu koristio je argument koji je "jednostavan i kratak, ali pogrešan". Pogrešan korak u dokazu bio je skriven u naizgled trivijalnoj lemi da je projekcija Borelovog skupa takođe Borelov skup. Deset godina kasnije, Suslin, onda vrlo mlad ali i veoma talentovan Luzinov student, otkrio je grešku. Tako Suslin pronalazi novu klasu podskupova realne prave, klasu analitičkih skupova, koji nastaju kao projekcije Borelovih skupova. Istovremeno, dokazao je da ima analitičkih skupova koji nisu Borelovi. Tako je nastala deskriptivna teorija skupova jedna od najzanimljivih i najdubljih disciplina teorije skupova. Ali, Suslin ubrzo umire (1919.) i formulacija Suslinove hipoteze pojavljuje se posle njegove smrti, ("Probleme 3" Fund. Math., **1**, 223, 1920). Suslinova hipoteza imaće centralno mesto u razvoju teorije beskonačnih drveta, i u tome Kurepini radovi biće od suštinske važnosti. Kurepa je počev od 1935. pokušavao da reši SH. U tome nije uspeo, jednostavno to nije bilo moguće uraditi u to vreme. Sredstva klasične teorije skupova koju je zasnovao Kantor, a Zermelo, Fraenkel, Hausdorff, König, Tarski i drugi razvijali nisu to omogućavala. Ipak, Kurepa je bio prvi matematičar koji je razumeo važnost drveta u teoriji skupova. Kasnije je nekoliko matematičara otkrivalo osobine ovih parcijalno uređenih skupova. Na primer, Miller 1943. i Sierpinski 1948. nezavisno su iznova otkrili pomenutu ekvivalenciju Suslinove hipoteze koju je Kurepa otkrio već 1935.

Koristeći beskonačna drveta, Kurepa je pronašao primere topoloških prostora sa važnim i neobičnim osobinama. Jedan primer ove vrste u vezi je sa Suslinovom linijom. Naime, dokazao je (*La condition de Suslin et une propriété caractéristique des nombres réels*, C.R. Acad. Sci. Paris **231**, (1950), 1113-1114) da topološki kvadrat Suslinovog kontinuumu K ima neprebrojivu celularnost, dok sam K je prebrojive celularnosti.

Kurepa nije rešio pitanje egzistencije Suslinovog drveta, niti Kurepinog drveta. Postulat kojim se tvrdi postojanje Kurepinog drveta nazavan je *Kurepinom hipotezom*, koja se kraće označava sa KH. Potpuno rešenje ovih problema urađeno je tek početkom sedamdesetih, pojavom Cohen-ovog forsinga, glavnim sredstvom savremene teorije skupova. Solovay, Tennenbaum i Jensen dokazali su da je SH nezavisna od ZFC+CH (Zermelo-Fraenkel-ova teorija skupova plus Kontinuum hipoteza), dok je Devlin 1978. dokazao da je svaka od sledećih teorija (Videti Todorčevićev članak *Trees and linearly ordered sets* u: K. Kunen and J.E. Vaughan (eds), *Set-Theoretic Topology*, North-Holand, Amsterdam, 1985, pp. 235-294.):

$$ZFC \pm CH \pm SH \pm KH$$

neprotivurečna. (Ovde, za rečenicu $j, \pm j$ označava bilo j , negaciju od j .) Ove činjenice pokazuju da se priroda postulata SH i KH razlikuje od ostalih aksioma ZFC. Otuda je jasno

zašto ove strukture imaju tako važno mesto u raznim konstrukcijama teorije skupova, topologiji, teoriji modela i beskonačnoj kombinatorici.

Profesor Kurepa je imao izrazitu sposobnost da oseti dobar i važan matematički problem i prefinjenu konstrukciju, naročito u vezi sa uređenim skupovima. Ovom prilikom ne možemo spomenuti mnogo primera ove vrste, ali jedan problem iz teorije brojeva zaslužuje specijalnu pažnju, s obzirom da se njime bavio veći broj naših i stranih matematičara. Kurepa je formulisao 1971. na jednom sastanku matematičara u Ohridu sledeći problem. Najpre je definisao jednu aritmetičku funkciju, $!n$, koju je nazvao "levi faktorijel funkcija", kao sumu faktorijela prvih $n-1$ prirodnih brojeva:

$$!n = 0! + 1! + 2! + \dots + (n-1)!$$

Tada $!n$ -hipoteza glasi:

Najveći zajednički delilac brojeva $!n$ i $n!$ je 2.

Ova hipoteza ima mnogobrojne zanimljive ekvivalentne formulacije i razmatrana je od strane većeg broja matematičara, između ostalih svoje priloge dali su L. Carlitz, Wagstaff, W. Keller, i jugoslovenski matematičari Slavić, Šami, Žižović, Stanković, Gogić, Ivić, Mijajlović, i drugi. Ova hipoteza nalazi se u knjizi R. Guy-a *Unsolved problems in number theory*, Springer-Verlag, 1981, problem B44. Knjiga zapravo predstavlja zbirku najvažnijih otvorenih problema teorije brojeva sa opisima pokušaja njihovih rešavanja. Kurepa je jedini matematičar prethodne Jugoslavije koji je autor nekog problema zapisanog u ovoj knjizi. Hipoteza je testirana računarskim metodama i proverena je za $n < 8.000.000$. Kurepa je najavio rešenje, ali rešenje nikad nije publikovao. Od R. Guy-a dobio sam pismo 1991. u kojem me obaveštava da je R. Bond iz Engleske ovaj problem možda rešio, ali se ovaj dokaz do danas nije pojavio.

Kurepa se osim teorije skupova, opšte topologije, osnova matematike i teorije brojeva, zanimao i za druge oblasti matematike. Njegovi radovi uključuju teme iz algebre (teorija matrica), zatim numeričku matematiku, računarstvo i teoriju fiksne tačke. Objavio je monografiju iz teorije skupova početkom pedesetih koja je predstavljala značajno delo ne samo za naše prostore. O tome svedoči činjenica da se ta knjiga nalazi u mnogim univerzitetskim bibliotekama u svetu, pa i u Londonskoj biblioteci (British Library), mada je napisana na srpskom. Takođe je napisao obiman dvotomni udžbenik iz algebre koji su koristile generacije studenata matematike.

S obzirom na veličinu, ovde nije moguće predstaviti kompletan naučni opus profesora Kurepe. Možemo samo zaključiti da profesor Đuro Kurepa ima velike zasluge za razvoj teorije skupova i matematike u celini. O tome svedoči i činjenica da je njegovo ime deo naziva nekoliko osnovnih pojmova iz savremene teorije skupova i topologije: Kurepino drvo, Kurepina hipoteza, Kurepina linija, Kurepini prostori. Ovakvu počast mogu zaslužiti samo veliki matematičari.