Brojčani sistemi

Nepozicioni – znak koji označava cifru ima istu vrednost bez obzira na poziciju u zapisu broja

Pozicioni – vrednost znaka koji predstavlja cifru zavisi i od izgleda znaka i od pozicije cifre u zapisu broja.

Pozicioni brojčani sistemi

Neka skup S sadrži $N > 1$ cifara. Brojčana vrednost X u pozicionom sistemu sa osnovom N piše se u obliku niske cifara, uz poštovanje sledećih pravila:

1. Broj različitih cifara pozicionog brojčanog sistema se naziva **osnova brojčanog sistema**.

2. Vrednost broja X u sistemu sa osnovom N je

$$(X)_N = \sum_{i=-m}^{n} V(x_i)$$

   gde su x_i cifre brojčanog sistema, $V(x_i)$ vrednost cifre x_i u zapisanoj nisci cifara, a i mesto cifre u zapisanoj nisci cifara ($i \in [-m, n]$).

3. U najvećem broju pozicionih brojčanih sistema važi $V(x_i) = x_i \cdot N^i$. Odavde

$$(X)_N = \sum_{i=-m}^{n} x_i \cdot N^i = x_n N^n + \ldots + x_0 N^0 + x_{-1} N^{-1} + \ldots + x_{-m} N^{-m}$$

   Sve operacije u ovom izrazu se vrše u brojčanom sistemu sa osnovom N

4. Po konvenciji ne pišu se osnova i stepen, a celobrojni i razlomljeni deo se razdvajaju zarezom

$$(X)_N \equiv x_n x_{n-1} \ldots x_0, x_{-1} \ldots x_{-m}$$

5. **Pozicija cifre** - mesto cifre u zapisu broja

6. **Dužina broja** - broj cifara u zapisu broja.

7. **Težina cifre** u zapisu broja zavisi od pozicije na kojoj se cifra nalazi

8. Za pozicioni brojčani sistem sa osnovom N, ukoliko su cifre tog brojčanog sistema u intervalu [0,N-1] važi da je broj cifara n koje su potrebne da bi se zapisao prirodan broj u intervalu [0,m] jednak $n = [log_N m] + 1$.

Primeri:

1. Brojčani sistem kod koga je $N=10$, $S=\{0,\ldots,9\}$ se naziva *dekadni sistem*.

2. Brojčani sistem kod koga je $N=8$, $S=\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$ se naziva *oktalni sistem*. Ovaj sistem se koristi u računarstvu, mada danas znatno redje nego u prethodnim decenijama. Primeri brojeva zapisanih u ovom sistemu su 123.456 i 243. Vrednost ovih brojeva u dekadnom sistemu je:

   - $(243)_8 = 2\times8^2 + 4\times8^1 + 3\times8^0 = (128)_{10}+(32)_{10}+(3)_{10} = (163)_{10}$
   - $(123.456)_8 = 1\times8^2 + 2\times8^1 + 3\times8^0 + 4\times8^{-1} + 5\times8^{-2} + 6\times8^{-3} = (83.58984375)_{10}$

3. Brojčani sistem kod koga je $N=2$, $S=\{0,1\}$ se naziva *binarni sistem*. Ovaj sistem se koristi u savremenim digitalnim računarima. Primer broja u binarnom sistemu je 1011110. Njegova vrednost je:

   - u dekadnom sistemu:
     $(1011110)_2 = 1\times2^6+0\times2^5+1\times2^4+1\times2^3+1\times2^2+1\times2^1+0\times2^0$
     $= (64)_{10}+(16)_{10}+(8)_{10}+(4)_{10}+(2)_{10} = (94)_{10}$
   - u oktalnom sistemu:
     $(1011110)_2 = 1\times2^6+0\times2^5+1\times2^4+1\times2^3+1\times2^2+1\times2^1+0\times2^0$
     $= (100)_8+(20)_8+(10)_8+(4)_8+(2)_8 = (136)_8$

4. Brojčani sistem kod koga je $N=$ 3, $S = \{0,1,2\}$ se naziva *troični sistem ili sistem sa osnovom tri*. Primer broja u troičnom sistemu je 1021210. Njegova vrednost u dekadnom sistemu je:
$(1021210)_3 = 1\times3^6 + 0\times3^5 + 2\times3^4 + 1\times3^3 + 2\times3^2 + 1\times3^1 + 0\times3^0$
$= (729)_{10} + (162)_{10} + (27)_{10} + (18)_{10} + (3)_{10} = (939)_{10}$

5. Brojčani sistem kod koga je $N=$ 3, $S = \{-1,0,1\}$ se naziva *balansirani troični brojčani sistem*. Primer broja u ovom sistemu je 110-11. Njegova vrednost u dekadnom sistemu je :
$(110-11)_{bt} = 1\times3^4 + 1\times3^3 + 0\times3^2 + -1\times3^1 + 1\times3^0$
$= (81)_{10} + (9)_{10} - (3)_{10} + (1)_{10} = (88)_{10}$

6. Brojčani sistem kod koga je osnova jednaka -N, a cifre su u intervalu [0,N-1] predstavlja brojeve se naziva brojčani sistem sa negativnom osnovom. Primer broja u ovom sistemu za N=10 je 123.45. Njegova vrednost se računa prema formuli

$$\begin{aligned}(X)_{-N} &= \textstyle\sum_{i=-m}^{n} x_i \cdot (-N)^i \\ &= x_n(-N)^n + \ldots + x_0(-N)^0 + x_{-1}(-N)^{-1} + \ldots + x_{-m}(-N)^{-m} \\ &= \textstyle\sum_{parni} x_i N^i - \sum_{neparni} x_i N^i\end{aligned}$$

Odavde je vrednost zapisanog broja u ”uobičajenom” dekadnom sistemu:
$(123.45)_{-10} = 1\times(-10)^2 + 2\times(-10)^1 + 3\times(-10)^0 + 4\times(-10)^{-1} + 5\times(-10)^{-2}$
$= (100)_{10} - (20)_{10} + (3)_{10} - (0.4)_{10} + (0.05)_{10} = (82.65)_{10}$
Specijalni slučaj kada je $N=$ -2, $S = \{0,1\}$ se naziva *negabinarni brojčani sistem*.

7. Osnova brojčanog sistema može da bude i razlomljen broj. Na primer neka je N= 0.5, $S = \{0,\ldots,9\}$. Vrednost broja 123.45 zapisanog u ovom sistemu u dekadnom sistemu je:
$(123.45)_{0.5} = 1\times(0.5)^2 + 2\times(0.5)^1 + 3\times(0.5)^0 + 4\times(0.5)^{-1} + 5\times(0.5)^{-2}$
$= (0.25)_{10} + (1.0)_{10} + (3)_{10} + (8)_{10} + (20)_{10} = (32.25)_{10}$

8. Brojčani sistem sa promenljivom osnovom kod koga je svakoj poziciji i pridružena vrednost m_i. Težina k-te pozicije T_k-te se definisana na sledeći način:

$$T_k = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ \prod_{j=0}^{j=k-1} m_j & k > 0 \end{cases}$$

dok cifra na k-toj poziciji pripada intervalu $[0, m_k - 1]$. Na primer, za osnove 8,7,5,3 vrednost broja 6432 zapisanog u ovom sistemu je:

V(6432)=6*$m_2 * m_1 * m_0$ + 4*$m_1 * m_0$ + 3*m_0 + 2*1

Kako je m_3=8, m_2=7, m_1=5, m_0=3 to je tražena vrednost jednaka 6*(7*5*3) + 4*(5*3) + 3*(3) + 2*(1)= 6*105 + 4*15 + 9 + 2 = 701

9. Brojčani sistem kod koga je $N = 16$, `S={0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F}` se naziva *heksadekadni sistem*. Heksadekadni sistem se takodje koristi u računarstvu. Kako sistem ima više od 10 cifara, kao oznake za njegove cifre koriste se velika slova A, B, C, D, E i F. Odgovarajuće vrednosti ovih cifara u dekadnom sistemu su 10, 11, 12, 13, 14 i 15. Primer broja u heksadekadnom sistemu je CDE92. Njegova vrednost u dekadnom sistemu se izračunava na sledeći način:

   $(\text{CDE92})_{16} = 12 \times 16^4 + 13 \times 16^3 + 14 \times 16^2 + 9 \times 16^1 + 2 \times 16^0 =$
   $(786432)_{10} + (53248)_{10} + (3584)_{10} + (144)_{10} + (2)_{10} = (843410)_{10}$

Prethodni primeri ilustruju dve osobine konvencionalnih pozicionih brojčanih sistema sa fiksnom osnovom:

1. povećavanjem osnove brojčanog sistema smanjuje se dužina zapisa broja;
2. u svim brojčanim sistemima se osnova zapisuje kao `10 (jedan,nula)`, dok je `0` (nula) najmanja cifra u svim sistemima.

Zapis mešovitih brojeva

Bez obzira na osnovu u kojoj se zapisuju brojevi, uvek važi:

1. Mešoviti brojevi se zapisuju u *uobičajenom obliku* sa tačkom osnove (tzv. *radix point*) izmedju celobrojnog i razlomljenog dela.

2. Svaki mešovit broj se uvek zapisuje pomoću n cifara, pri čemu se sa $m \leq n$ cifara zapisuje razlomljeni deo, a sa $n - m$ cifara celobrojni deo broja.

   Ako je broj cifara u celobrojnom delu broja veći od $n - m$ javlja se greška pri zapisu. Ukoliko je broj cifara u razlomljenom delu $< m$ prepostale pozicije se popunjavaju nulama. Ukoliko je broj cifara u razlomljenom delu $> m$ tada se zapis broja skraćuje na m cifara u razlomljenom delu.

3. Zapis u **fiksnom zarezu**: broj cifara u razlomljenom delu uvek fiksiran (i jednak m) bez obzira na veličinu broja.

4. Zapis u **pokretnom zarezu**: svaki mešovit broj zapisan u osnovi N može da se zapiše kao uredjen par (F,E) čiji su elementi frakcija (F) i eksponent (E) koji su predstavljeni kao brojevi u fiksnom zarezu. Vrednost broja je jednaka F*N^E.

Broj	Format zapisa			
	7.4	5.3	6.1	8.0
	`---.----`	`--.---`	`-----.-`	`--------.`
$(1.3543)_{10}$	`␣␣1.3543`	`␣1.354`	`␣␣␣␣1.3`	`␣␣␣␣␣␣␣1.`
$(12.7)_{10}$	`␣12.7000`	`12.700`	`␣␣␣12.7`	`␣␣␣␣␣␣12.`
$(1347)_{10}$	`********`	`******`	`␣1347.0`	`␣␣␣␣1347.`
$(123.456)_{8}$	`123.4560`	`******`	`␣␣123.4`	`␣␣␣␣␣123.`
$(AB.1)_{16}$	`␣AB.1000`	`AB.100`	`␣␣␣AB.1`	`␣␣␣␣␣␣AB.`
$(1011.1101)_{2}$	`********`	`******`	`␣1011.1`	`␣␣␣␣1011.`
$(0.1101)_{2}$	`␣␣0.1101`	`␣0.110`	`␣␣␣␣0.1`	`␣␣␣␣␣␣␣0.`

Tabela 1: Primer zapisa brojeva u fiksnom zarezu u različitim formatima zapisa

Broj	Neki mogući zapisi		
	Zapis 1	Zapis 2	Normalizovan zapis
$(13.543)_{10}$	(13.543, 0)	(0.13543,+2)	(1.3543,+1)
$(12.7)_{10}$	(127000.0,-4)	(0.00127,+4)	(1.27,1)
$(5347)_{10}$	(53470.,-1)	(0.005347,+6)	(5.347,+3)
$(123.22)_{4}$	(12322.000,-2)	(0.012322,+10)	(1.2322,+2)
$(AB.1)_{16}$	(AB10.,-2)	(0.000AB1,+5)	(A.B1,+1)
$(1011.1101)_{2}$	(10111101,-100)	(10.111101,+10)	(1.0111101,+11)
$(0.1101)_{2}$	(110.10,-11)	(1101.0,-100)	(1.101,-1)

Tabela 2: Primer zapisa brojeva u pokretnom zarezu

Po konvenciji se, zbog jasnijeg zapisa, eksponenti prevode u dekadni sistem uz eksplicitno navodjenje osnove kojom se stepenuje eksponent:

- (0.13543,+2) gde su i frakcija i eksponent zapisani u sistemu sa osnovom 10 zapisuje kao $0.13543*10^{+2}$
- (0.012322,+10) gde su i frakcija i eksponent zapisani u sistemu sa osnovom 4 zapisuje kao $0.012322*4^{+4}$
- (1.0111101,+11) gde su i frakcija i eksponent zapisani u sistemu sa osnovom osnovom 2 zapisuje kao $1.0111101.0*2^{+3}$