

# Мере сличности

Ненад Митић

Математички факултет  
[nenad@matf.bg.ac.rs](mailto:nenad@matf.bg.ac.rs)

# Увод

- Како одредити сличност/различитост објеката, образаца, атрибута, догађаја, ...
- Подаци - различит тип, структура, расподела, димензионалност, ...
- Термин *близина* (енг. *proximity*) означава и сличност и различитост

# Увод - наставак

- Функције сличности - већа вредност  $\longrightarrow$  већа сличност
- Различитост - нумеричка мера колико су два објекта, атрибута, ... различити
- Сличност често  $[0,1]$ , а различитост у  $[0,+\infty)$
- *Растојање* - синоним за различитост
- Функција растојања - мања вредност  $\longrightarrow$  већа сличност

## Увод - наставак

Пример: функције сличности/различитости атрибута  $p$  и  $q$

Тип атрибута	Сличност	Различитост
Номинални	$s = \begin{cases} 1 & \text{ако } p = q \\ 0 & \text{ако } p \neq q \end{cases}$	$d = \begin{cases} 1 & \text{ако } p \neq q \\ 0 & \text{ако } p = q \end{cases}$
Редни	$s = 1 - \frac{ p-q }{n-1}$	$d = \frac{ p-q }{n-1}$
	Вредности се пресликавају у скуп $[0, n-1]$ где је $n$ број вредности	
Интервални или размерни	$s = -d, s = \frac{1}{1+d},$ $s = 1 - \frac{d - \min_d}{\max_d - \min_d}$	$d =  p - q $

# Мера и метрика

Функција растојања  $d$  је *метрика* ако важи

① Позитивна одређеност

- $d(p, q) \geq 0 \quad \forall p, q$
- $d(p, q) = 0$  акко  $p = q$

② Симетрија:  $d(p, q) = d(q, p) \quad \forall p, q$

③ Неједнакост троугла:

$$d(p, r) \leq d(p, q) + d(q, r) \quad \forall p, q, r$$

# Мере сличности за квантитативне податке

Растојање између две тачке у  $n$  димензионом простору  
 $\bar{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  и  $\bar{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$

- Хамингово растојање

$$\text{Hamming}(\bar{X}, \bar{Y}) = \sum_{i=1}^n q_i \quad \text{где је} \quad q_i = \begin{cases} 1, & \text{ако } x_i \neq y_i \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

- Најчешће коришћена мера је растојање Минковског или  $L_p$  мера

$$\text{Dist}(\bar{X}, \bar{Y}) = \left( \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}$$

# Растојање Минковског

## Специјални случајеви

- $p = 1$  - Градски блок (такси, Менхетн, ...)
- $p = 2$  - Еуклидско растојање
- $p \rightarrow \infty$  супремум растојање ( $L_{max}, L_\infty$  норма) =  
 $\max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$
- Не мешати  $n$  (број димензија података) и  $p$  (величина параметра)

# Растојање Минковског – недостаци

Није погодно за примену

- код ретких вишедимензионалних података са непознатом расподелом, шумовима, ...
- ако постоје локално ирелевантни атрибути (пример: анализа крви пацијената оболелих од различитих болести) због шума који се кумулира при израчунавању



# Махаланобисово растојање

$$Maha(\bar{X}, \bar{Y}) = \sqrt{(\bar{X} - \bar{Y})\Sigma^{-1}(\bar{X} - \bar{Y})^T}$$

где је  $\Sigma^{-1}$  инверзна матрица матрице коваријанси података

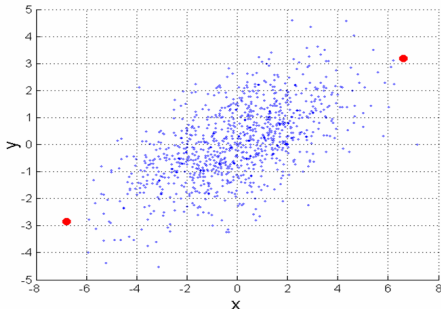
# Махаланобисово растојање

Корисно је када важи

- атрибути су у корелацији
- атрибути имају различите опсеге вредности (различите варијансе)
- расподела података је приближно нормална (Гаусова)

# Утицај расподеле на растојање

Међусобно растојање тачака  $A(-6.8, -2.9)$  и  $B(6.8, 3.1)$



Еуклидско растојање тачака је 14.7, а  
Махаланобисово 6

# Растојање Минковског са тежинама

У случају да је потребно доделити тежинске факторе  $a_i$  хетерогеним атрибутим  $i$

$$Dist(\bar{X}, \bar{Y}) = \left( \sum_{i=1}^d a_i \times |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}$$

# Мере сличности података са бинарним атрибутима

Сличност два слога  $\bar{X} = (x_1, x_2, \dots, x_d)$  и  $\bar{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_d)$  са бинарним атрибутима се може дефинисати помоћу

- $M_{01}$  = број атрибута који су једнаки 0 у  $\bar{X}$  и 1 у  $\bar{Y}$
- $M_{10}$  = број атрибута који су једнаки 1 у  $\bar{X}$  и 0 у  $\bar{Y}$
- $M_{00}$  = број атрибута који су једнаки 0 у  $\bar{X}$  и 0 у  $\bar{Y}$
- $M_{11}$  = број атрибута који су једнаки 1 у  $\bar{X}$  и 1 у  $\bar{Y}$

# Једноставно и Жакардово упаривање коэффицијена

- Једноставно упаривање коэффициентјената (енг. *Simple Matching Coefficient, SMC*)  
 $SMC = \text{број упарених} / \text{број атрибута} = (M_{11} + M_{00}) / (M_{01} + M_{10} + M_{11} + M_{00})$
- Жакардови коэффициентјенти - асиметрични атрибути  
 $J = \text{број парова 11} / \text{број атрибута где нису обе вредности 0} = M_{11} / (M_{01} + M_{10} + M_{11})$

# Проширени Жакардови коефицијенти (коефицијенти Танимотоа)

- Варијанта Жакардових коефицијената применљива на атрибуте са непрекидним и пребројивим вредностима
- У случају атрибута са бинарним вредностима редукује се на Жакардове коефицијенте

$$T(\bar{X}, \bar{Y}) = \frac{\bar{X} \bullet \bar{Y}}{\|\bar{X}\|^2 + \|\bar{Y}\|^2 - \bar{X} \bullet \bar{Y}}$$

# Косинусна сличност

Нека су  $\bar{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  и  $\bar{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  два вектора докумената. Њихова сличност може да се израчуна као

$$\cos(\bar{X}, \bar{Y}) = \frac{\bar{X} \bullet \bar{Y}}{\|\bar{X}\| \times \|\bar{Y}\|}$$

односно

$$\cos(\bar{X}, \bar{Y}) = \frac{\sum_{i=1}^d x_i \times y_i}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^d x_i^2\right)} \times \sqrt{\left(\sum_{i=1}^d y_i^2\right)}}$$



# Косинусна сличност

Користи се код великог броја парова '00' при чему може да буде примењена и на не-бинарне векторе (касније-пример са документима)

Primer:

$$d_1 = 3 \ 2 \ 0 \ 5 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2 \ 0 \ 0$$

$$d_2 = 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 2$$

$$d_1 \cdot d_2 = 3*1+2*0+0*0+5*0+0*0+0*0+0*0+2*1+0*0+0*2 = 5$$

$$\|d_1\| = (3*3+2*2+0*0+5*5+0*0+0*0+0*0+2*2+0*0+0*0)^{0.5} = (42)^{0.5} = 6.481$$

$$\|d_2\| = (1*1+0*0+0*0+0*0+0*0+0*0+0*0+1*1+0*0+2*2)^{0.5} = (6)^{0.5} = 2.245$$

$$\cos(d_1, d_2) = 0.3150$$

# Корелација

Корелација два објекта који имају бинарне или непрекидне атрибуте је мера линеарног односа између њихових атрибута

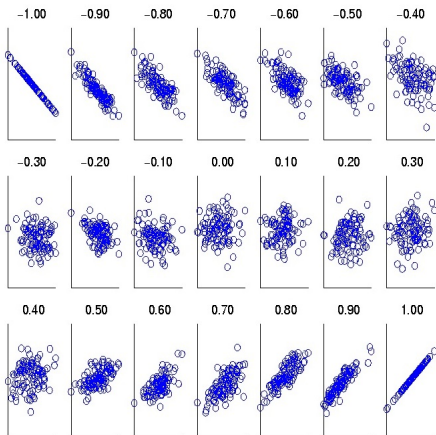
$$\text{коваријанса}(x, y) = \text{cov}_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y})$$

$$\text{стандардна девијација}(x) = \sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2}$$

$$\text{средња вредност}(x) = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$$

$$\text{Пирсонов коефицијент корелације}(x, y) = \rho_{xy} = \text{cov}_{xy} / (\sigma_x * \sigma_y)$$

# Корелација



Ако је корелација =1 (-1) → перфектно позитиван  
(негативан) линеарни однос  $x_k = ay_k + b$

# Мере сличности за категоричке податке

Сличност два податка  $\bar{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  и  $\bar{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  са категоричким атрибутима се може дефинисати преко сличности појединачних атрибута

$$Sim(\bar{X}, \bar{Y}) = \sum_{i=1}^n S(x_i, y_i)$$

# Мере сличности за категоричке податке

- Најједноставнији случај:  $S(x_i, y_i) = \begin{cases} 1 & \text{ако } x_i = y_i \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$
- Не узима се у обзир релативна фреквенција атрибута
- Користи се *агрегирање статистичких особина*
- Мање фреквентне упарене вредности имају већу тежину

# Сличност атрибута

Нека је  $p_k(x)$  број слогова у којима  $k$ -ти атрибут узима вредност  $x$

Мере које укључују учесталост (фреквенцију) су

- *Инверзна учесталост појављивања*

$$S(x_i, y_i) = \begin{cases} 1/p_k(x_i)^2, & \text{ако } x_i = y_i \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

- *'Појављивање је добро'*. Већа сличност се постиже када је вредност мање учестала

$$S(x_i, y_i) = \begin{cases} 1 - p_k(x_i)^2, & \text{ако } x_i = y_i \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

# Сличност докумената

- Сличност два документа се боље оцењује ако се користе речи које су заједничке
- За нормализацију упаривања речи у случајевима када има речи које се ретко јављају и које се често јављају (везници, ...) користи се инверзна функција броја докумената  $n_i$  у коме се јавља реч  $i$  у укупном броју докумената  $n$ :

$$id_i = \log(n/n_i)$$

- За смањење могућност да појава неке честе речи утиче на сличност докумената могу да се користе и функције

$$f(x_i) = \text{sqrt}(x_i)$$

$$f(x_i) = \log(x_i)$$

# Сличност докумената

- нормализована фреквенција за  $i$ -ту реч може да се дефинише као

$$h(x_i) = f(x_i) \cdot id_i$$

- Косинусно и Жакардово растојање докумената са нормализованом фреквенцијом речи су

$$\cos(\bar{X}, \bar{Y}) = \frac{\sum_{i=1}^d h(x_i) \times h(y_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^d h(x_i)^2} \times \sqrt{\sum_{i=1}^d h(y_i)^2}}$$

$$J(\bar{X}, \bar{Y}) = \frac{\sum_{i=1}^d h(x_i) \times h(y_i)}{\sum_{i=1}^d h(x_i)^2 + \sum_{i=1}^d h(y_i)^2 - \sum_{i=1}^d h(x_i) \times h(y_i)}$$



# Подаци са квантитативним и категоријским атрибутима

Сличност два слога  $\bar{X} = (\bar{X}_n, \bar{X}_c)$  и  $\bar{Y} = (\bar{Y}_n, \bar{Y}_c)$  са 'мешаним' (квантитативним и категоријским) атрибутима

$$Sim(\bar{X}, \bar{Y}) = \lambda \times NumSim(\bar{X}_n, \bar{Y}_n) + (1 - \lambda) \times CatSim(\bar{X}_c, \bar{Y}_c)$$

где  $\lambda$  одређује релативну важност категоријских и нумеричких атрибута

# Сличност дискретних података

Едит растојање, растојање за трансформације  
 $\bar{X} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$  у  $\bar{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ .

За првих  $i$  симбола из  $\bar{X}$  и првих  $j$  симбола  $\bar{Y}$   
цена трансформације је

$$Edit(i, j) = \min \begin{cases} Edit(i-1, j) + \text{цена брисања} \\ Edit(i, j-1) + \text{цена уметања} \\ Edit(i-1, j-1) + I_{ij} \times \text{цена замене} \end{cases}$$

где је  $I_{ij}$  индикатор једнакости  $i$ -тог симбола  $\bar{X}$  и  
 $j$ -тог симбола  $\bar{Y}$

Пример: трансформација абабабабаб у бабабаба

# Сличност дискретних података

Сличност на основу најдуже заједничке подниске

За првих  $i$  симбола из  $\bar{X} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$  и првих  $j$  симбола из  $\bar{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ , у ознаци  $\bar{X}_i$  и  $\bar{Y}_j$  најдужа заједничка подниска (енг. *Longest Common SubSequence*, *LCSS*)

$$LCSS(i, j) = \max \begin{cases} LCSS(i-1, j-1) + 1 & \text{ако } x_i = y_i \\ LCSS(i-1, j) & x_i \text{ није упарено} \\ LCSS(i, j-1) & y_j \text{ није упарено} \end{cases}$$

Већа вредност означава већу сличност; број подниски директно зависи од дужине ниски

Пример: одредити  $LCSS(\text{агбфцгдђе, афбгцхдише})$

# Мере на основу информација

- Мере сличности засноване на теорији информација
- Ентропија
  - $X$  - догађај са  $n$  могућих исхода  $x_1, \dots, x_n$
  - Вероватноћа исхода је  $p_1, \dots, p_n$
  - Ентропија догађаја  $X$  је

$$H(X) = - \sum_{i=1}^n p_i \log_2 p_i$$

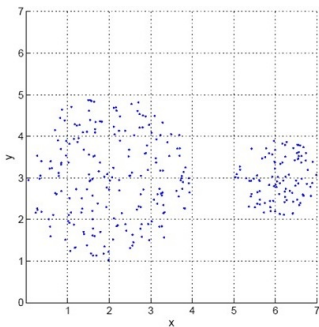
- $H(X) \in [0, \log_2 n]$  представља меру колико битава је потребно у просеку за представљање догађаја  $X$

# Мере на основу густина

- Мери се степен блискости објеката у некој области
- Концепт густине се користи у кластеровању и откривању аномалија
- Нечешће се користе
  - Еуклидска густина - број тачака по јединици површине/запремине
  - Густина вероватноће - процена дистрибуције података на основу изгледа
  - Граф засноване густине - на основу повезаности

# Мере на основу густина

Пример: Еуклидска густина заснована на ћелијама - подела региона на неки број ћелија и дефинисање густине преко броја тачака у ћелијама



0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
4	17	18	6	0	0	0
14	14	13	13	0	18	27
11	18	10	21	0	24	31
3	20	14	4	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

# Мере на основу густина

Пример: Еуклидска густина заснована на центру - број ћелија на одређеној удаљености од централне тачке

